

Marée thermique atmosphérique

I Stratification de la troposphère

- 1) Justifier à partir de la composition de l'atmosphère que la masse molaire de l'air vaut $\mathcal{M}_{\text{air}} \approx 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

L'atmosphère est principalement constitué de diazote (N_2) et de dioxygène (O_2) dans les proportions massiques respectives 80 % et 20 %. L'azote possède 14 nucléons, la masse molaire du diazote est donc $\mathcal{M}_{\text{H}_2} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. L'oxygène possède 16 nucléons donc la masse molaire du dioxygène vaut $\mathcal{M}_{\text{O}_2} = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. On en déduit la masse molaire de l'air :

$$\mathcal{M}_{\text{air}} = 0.80\mathcal{M}_{\text{N}_2} + 0.20\mathcal{M}_{\text{O}_2} \approx 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

- 2) Exprimer l'équation d'état de l'air en fonction de ρ_0 , P_0 , T_0 . On introduira la constante $\mathcal{R}_{\text{air}} = R/\mathcal{M}_{\text{air}}$ qui est le rapport de la constante des gaz parfaits R par la masse molaire $\mathcal{M}_{\text{air}}$. On précisera la valeur numérique de $\mathcal{R}_{\text{air}}$.

L'équation d'état des gaz parfaits est $p_0 V_0 = n_0 R T_0$ avec $n_0/V_0 = \rho_0/\mathcal{M}_{\text{air}}$. Par conséquent,

$$p_0 = \frac{\rho_0 R T_0}{\mathcal{M}_{\text{air}}} = \rho_0 \mathcal{R}_{\text{air}} T_0,$$

avec

$$\mathcal{R}_{\text{air}} = \frac{8.314}{29 \times 10^{-3}} = 290 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

- 3) Justifier que l'indice adiabatique de l'air à température ambiante vaut $\gamma = 1.4$. Dans la suite, nous supposons cette valeur indépendante de la température.

L'air étant composé essentiellement de molécule diatomique (diazote N_2 et dioxygène O_2), l'indice adiabatique de l'air vaut $7/5 = 1.4$.

- 4) À quelle condition, exprimée en fonction de $d\rho$ et $d\rho_0$, l'atmosphère est-elle stablement stratifiée ? Justifier.

Il faut que le poids soit supérieur à la poussée d'Archimède et donc que la densité de la parcelle soit plus élevée que la densité de l'atmosphère environnante. Mathématiquement, cela revient à $d\rho > d\rho_0$.

- 5) Dans le cas de cette transformation, exprimer ρ' en fonction de ρ , P , P' et γ .

Pour une transformation adiabatique réversible, les grandeurs thermodynamiques évoluent selon la loi de Laplace

$$P' V'^{\gamma} = P V^{\gamma}.$$

Sachant que la parcelle est un système fermé, la masse m qu'elle contient reste constante au cours de la transformation. En divisant l'équation ci-dessus par m^{γ} , on obtient

$$\rho' = \left(\frac{P'}{P}\right)^{1/\gamma} \rho.$$

- 6) En déduire, à l'aide d'un développement limité, une expression de $d\rho$ en fonction de ρ_0 , P_0 , dP_0 et γ .

Comme $P' = P_0(z + dz) = P + dP_0$, on obtient

$$\rho' = \rho \left(\frac{P + dP_0}{P} \right)^{1/\gamma} \approx \rho \left(1 + \frac{1}{\gamma P} dP_0 \right).$$

D'où

$$d\rho = \rho' - \rho = \frac{\rho_0}{\gamma P_0} dP_0.$$

- 7) À partir de l'équation d'état de l'air, établir la relation suivante

$$\frac{d\rho_0}{\rho_0} = \frac{dP_0}{P_0} - \frac{dT_0}{T_0}. \quad (1)$$

La dérivée logarithmique de l'équation d'état donne

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{d\rho_0}{\rho_0} + \frac{dT_0}{T_0},$$

d'où le résultat.

- 8) En déduire que la condition obtenue à la question 4 pour une atmosphère stablement stratifiée peut s'écrire

$$\left[\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{T_0}{P_0} \frac{dP_0}{dz} + \frac{dT_0}{dz} \right] dz > 0. \quad (2)$$

On rappelle que la condition de stabilité s'écrit $d\rho > d\rho_0$ ou, de façon équivalente, $d\rho - d\rho_0 > 0$. En substituant $d\rho$ et $d\rho_0$ par les expressions obtenues précédemment, on obtient

$$\frac{\rho_0}{\gamma P_0} dP_0 - \left(\frac{\rho_0}{P_0} dP_0 - \frac{\rho_0}{T_0} dT_0 \right) > 0.$$

En factorisant par $\rho_0 dz / T_0$, cela donne

$$\left[\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{T_0}{P_0} \frac{dP_0}{dz} + \frac{dT_0}{dz} \right] \frac{\rho_0}{T_0} dz > 0.$$

Or ρ_0 et T_0 sont positifs, d'où le résultat.

- 9) Sachant que dans la troposphère les gradients de pression et de température sont tous les deux négatifs, justifier que cette couche de l'atmosphère est stablement stratifiée tant que la valeur absolue du gradient de température, $|dT_0/dz|$, est inférieur à une limite que l'on exprimera en fonction de la valeur absolue du gradient de pression $|dP_0/dz|$ et des autres données du problème.

Pour un $dz > 0$, on obtient

$$\frac{dT_0}{dz} > \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T_0}{P_0} \frac{dP_0}{dz}.$$

Or, $|dT_0/dz| = -dT_0/dz$ et $|dP_0/dz| = -dP_0/dz$, donc on inverse le sens de l'inégalité en prenant les valeurs absolues et on obtient

$$\left| \frac{dT_0}{dz} \right| < \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T_0}{P_0} \left| \frac{dP_0}{dz} \right|.$$

Il s'agit de la condition de stabilité telle qu'exprimée par Schwarzschild en 1906 dans le cadre de la physique stellaire.

10) Une atmosphère isotherme est-elle stablement stratifiée ? Justifier.

Le gradient de température d'une atmosphère isotherme est nul par définition. Par conséquent, une telle atmosphère vérifie le critère obtenu ci-dessus et est stablement stratifiée.

I.1 Atmosphère à stratification neutre

11) Montrer que le gradient de température est relié au gradient de pression par la relation

$$\frac{dT_0}{T_0} = \kappa \frac{dP_0}{P_0}. \quad (3)$$

Donner l'expression de κ et vérifier numériquement que $\kappa \approx 0,29$.

Pour une atmosphère à stratification neutre, d'après la question 8,

$$\frac{dT_0}{dz} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T_0}{P_0} \frac{dP_0}{dz}$$

On en déduit que

$$\frac{dT_0}{T_0} = \kappa \frac{dP_0}{P_0},$$

avec $\kappa = \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2}{7} \approx 0.29$.

12) Exprimer la variation de pression dP_0 en fonction de la variation d'altitude dz . On notera g l'accélération de la pesanteur supposée uniforme sur toute la hauteur de l'atmosphère.

Il s'agit de la loi fondamentale de l'hydrostatique : $dP_0 = -\rho_0(z)g dz$.

13) Déterminer le gradient de température au sol, que l'on notera $\mu_{\text{sec}} = (dT_0/dz)_{z=0}$, en fonction de κ , g et $\mathcal{R}_{\text{air}}$. Faire l'application numérique.

En utilisant la loi fondamentale de l'hydrostatique $dP_0 = -\rho_0 g dz$ et la relation trouvée entre les gradients de température et de pression, on obtient

$$\frac{dT_0}{dz} = -\kappa \frac{\rho_0 g T_0}{P_0}.$$

En substituant $\rho_0 T_0 / P_0$ à l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits, il vient

$$\frac{dT_0}{dz} = -\frac{\kappa g}{\mathcal{R}_{\text{air}}}.$$

Application numérique :

$$\frac{dT_0}{dz} = -\frac{0.29 \times 9.81}{290} = -0,01 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1} = -10 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}.$$

- 14) Comparer la valeur obtenue à la pente de la température au niveau de la troposphère telle que prescrite par l'organisation internationale de standardisation dans la figure 2.

On peut lire sur la figure que la température passe de $+15^{\circ}\text{C}$ au sol à $-56,5^{\circ}\text{C}$ à 11 km. Cela fait un gradient de $-6,5\text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$, c'est-à-dire un gradient nettement plus faible en valeur absolue que la valeur trouvée précédemment.

I.2 Air humide

- 15) Étant donné le sens de variation de la température lorsque la parcelle s'élève, indiquer le changement d'état de l'eau dans cette parcelle.

Lors d'un mouvement ascensionnel, la température de la parcelle décroît. On en déduit que l'eau contenu dans cette parcelle aura tendance à passer de forme gazeuse à forme liquide, c'est-à-dire à se liquéfier.

- 16) Cette transformation est-elle endothermique ou exothermique? En déduire l'effet qualitatif de la présence d'humidité dans la parcelle sur le gradient de température au sol.

Il s'agit d'une transformation exothermique. La parcelle va se refroidir moins vite puisque la liquéfaction va injecter un peu d'énergie. Le gradient de température sera donc plus faible en valeur absolue.

- 17) Dans le diagramme de phase de l'eau de la figure 3, identifier les différentes phases de l'eau (ETAT 1, ETAT 2 et ETAT 3) et les deux points remarquables A et B. Rappeler le nom des transformations entre chacune de ces trois phases.

- ETAT 1 : Solide
- ETAT 2 : Liquide
- ETAT 3 : Gaz/Vapeur
- Point A : Point triple
- Point B : Point critique
- vaporisation/évaporation/ébullition : liquide $\rightarrow$ vapeur
- condensation/liquéfaction : vapeur $\rightarrow$ liquide
- fusion : solide $\rightarrow$ liquide
- solidification : liquide $\rightarrow$ solide
- sublimation : solide $\rightarrow$ vapeur
- condensation solide : vapeur $\rightarrow$ solide

- 18) Dans ce même diagramme, indiquer la courbe de pression de vapeur saturante de l'eau. Par lecture graphique, donner sa valeur à la température de 15°C .

Dans le diagramme de phase de l'eau, la pression de vapeur saturante en fonction de la température est donnée par la courbe entre les points A et B. Par lecture graphique, la pression de vapeur saturante à $T = 15^{\circ}\text{C}$ vaut $P_{\text{sat}}(15^{\circ}\text{C}) \approx 1,5\text{ kPa}$.

I.3 Gradient adiabatique humide

19) Montrer que le rapport de mélange saturant est donné par la formule

$$r_{\text{sat}} = \frac{\mathcal{M}_{\text{H}_2\text{O}}}{\mathcal{M}_{\text{air}}} \frac{P_{\text{sat}}}{P}, \quad (5)$$

et justifier que le rapport des masses molaires vaut $\mathcal{M}_{\text{H}_2\text{O}}/\mathcal{M}_{\text{air}} \approx 0,62$.

D'après l'équation d'état des gaz parfaits,

$$P_{\text{sat}} = \rho_{\text{sat}} \frac{RT}{\mathcal{M}_{\text{H}_2\text{O}}}, \quad \text{et} \quad P_{\text{sec}} = \rho_{\text{sec}} \frac{RT}{\mathcal{M}_{\text{air}}}.$$

On en déduit

$$r_{\text{sat}} = \frac{\rho_{\text{sat}}}{\rho_{\text{sec}}} = \frac{\mathcal{M}_{\text{H}_2\text{O}}}{\mathcal{M}_{\text{air}}} \frac{P_{\text{sat}}}{P}.$$

Application numérique,

$$r_{\text{sat}} = \frac{18}{29} \frac{P_{\text{sat}}}{P} \approx 0,62 \frac{P_{\text{sat}}}{P}.$$

20) En déduire la valeur de r_{sat} à la température de surface moyenne de la Terre $T_s = 15^\circ\text{C}$. Justifier l'approximation $m_{\text{sec}} \approx m$.

En utilisant le résultat de la question 18, on trouve $r_{\text{sat}}(15^\circ\text{C}) = 0,01$. Par conséquent, l'approximation $m_{\text{sec}} = m$ engendre une erreur de l'ordre de 1 % seulement.

21) En exprimant la variation d'enthalpie massique dh de deux façons, montrer que

$$c_p dT + \Delta h_v dr_{\text{sat}} + g dz = 0, \quad (6)$$

avec c_p , la capacité thermique massique à pression constante. On se placera dans le cas où la température T et la pression P de la parcelle restent en équilibre avec la température T_0 et la pression P_0 de l'atmosphère lorsqu'elle s'élève de la quantité dz .

Dans cette question, on s'intéresse au système constitué d'une parcelle contenant un mélange d'eau sous formes liquide et gazeuse et d'air. L'identité thermodynamique permet d'écrire pour ce système $dh = Tds + vdp$, avec $ds = 0$ pour une transformation adiabatique réversible. D'autre part, l'enthalpie de ce système est modifiée par la variation de température et la liquéfaction de la vapeur selon $dh = c_p dT + \Delta h_v dm_{\text{sat}}/m \approx c_p dT + \Delta h_v dr_{\text{sat}}$. Par conséquent, en se rappelant que le volume molaire v n'est autre que l'inverse de la masse volumique ρ , il vient

$$c_p dT + \Delta h_v dr_{\text{sat}} = \frac{1}{\rho} dP.$$

Enfin, comme la parcelle reste en équilibre avec l'atmosphère, $dP = dP_0 = -\rho_0 g dz = -\rho g dz$, d'où le résultat

$$c_p dT + \Delta h_v dr_{\text{sat}} + g dz = 0.$$

- 22) Montrer que le gradient de température au sol $\mu_{\text{sat}} = (dT_0/dz)_{z=0}$ pour un air saturé est donné par l'expression

$$\mu_{\text{sat}} = -\frac{g}{c_p} \frac{1 - \rho_0 \Delta h_v \left(\frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial P} \right)_T}{1 + \frac{\Delta h_v}{c_p} \left(\frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial T} \right)_P}. \quad (7)$$

En posant

$$dr_{\text{sat}} = \left(\frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial T} \right)_P dT,$$

avec $dP = -\rho_0 g dz$, il vient

$$\mu_{\text{sat}} = -\frac{g}{c_p} \frac{1 - \rho_0 \Delta h_v \left(\frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial P} \right)_T}{1 + \frac{\Delta h_v}{c_p} \left(\frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial T} \right)_P}.$$

- 23) Montrer que $\mu_{\text{sat}} = \mu_{\text{sec}}$ lorsque le rapport de mélange saturant r_{sat} est constant. Le justifier physiquement.

Lorsqu'on pose $r_{\text{sat}} = 0$, on trouve $\mu_{\text{sat}} = -g/c_p$, à comparer avec $\mu_{\text{sec}} = -\kappa g/\mathcal{R}_{\text{air}}$. Il faut donc vérifier si $c_p = \mathcal{R}_{\text{air}}/\kappa$. En effet,

$$c_p - \gamma c_v = 0 \quad \text{et} \quad c_p - c_v = \mathcal{R}_{\text{air}} \quad \Rightarrow \quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \mathcal{R}_{\text{air}} = \frac{\mathcal{R}_{\text{air}}}{\kappa}.$$

Ce résultat s'explique physiquement. En effet, dans un air sec, il n'y a pas d'humidité donc $r_{\text{sat}} = 0$ est bien constant.

- 24) Exprimer μ_{sat} en fonction de μ_{sec} , r_{sat} , T_0 , T_{ref} , A , Δh_v , $\mathcal{R}_{\text{air}}$ et c_p .

$$\frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial P} = -\frac{r_{\text{sat}}}{P_0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial T} = A \frac{T_{\text{ref}}}{T_0^2} r_{\text{sat}}.$$

De plus, $P_0 = \rho_0 \mathcal{R}_{\text{air}} T_0$ et $c_p = \mathcal{R}_{\text{air}}/\kappa$. On en déduit

$$\mu_{\text{sat}} = \mu_{\text{sec}} \frac{1 + \frac{\Delta h_v}{\mathcal{R}_{\text{air}} T_0} r_{\text{sat}}}{1 + A \frac{\Delta h_v}{c_p T_0} \frac{T_{\text{ref}}}{T_0} r_{\text{sat}}}.$$

- 25) La prise en compte de l'humidité telle que décrite par l'équation (7) revient à remplacer la constante κ introduite dans l'équation (3) par une constante effective $\kappa_{\text{sat}} = 0,16$. En déduire la valeur numérique de μ_{sat} . Entre les modèles d'air sec et d'air saturé, lequel se rapproche le plus du profil de température observé d'après l'Organisation Internationale de Standardisation ?

D'après la réponse à la question 13, le gradient de température est proportionnel à la constante κ . On en déduit que le gradient adiabatique humide vaut $\mu_{\star} = \frac{0,16}{0,29} \mu_{\text{sec}} = -5,5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$. Le modèle d'atmosphère humide fournit un profil de température plus en accord avec les observations.

II Déformation de l'atmosphère

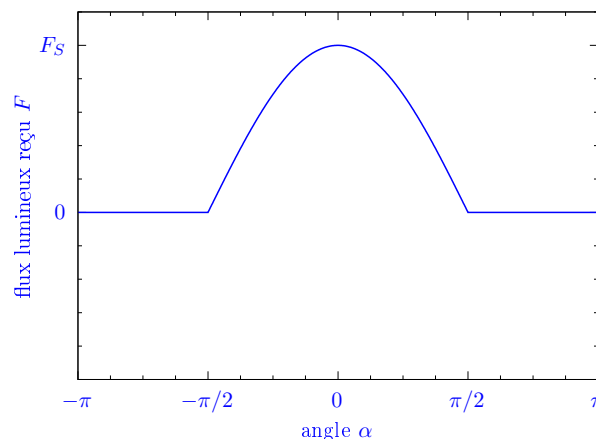
II.1 Décomposition du flux solaire reçu en chaque point de la Terre

- 26) Déterminer l'expression du flux solaire reçu $F(\alpha)$ défini comme la puissance lumineuse reçu au point M par unité de surface terrestre. On exprimera le résultat en fonction de la constante solaire F_S et de l'angle α . On distinguera le cas où M se situe sur la face éclairée de la Terre de celui où M est dans l'ombre.

Le flux solaire reçu est égal à la puissance lumineuse $d\mathcal{P}$ interceptée par la surface dS inclinée d'un angle α par rapport à la normale aux rayons incidents divisée par cette surface. On obtient

$$F = \frac{d\mathcal{P}}{dS} = \begin{cases} F_S \cos \alpha & \text{si } 0 \leq |\alpha| \leq \pi/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 27) Tracer l'allure du flux $F(\alpha)$ en fonction de l'angle α variant de $-\pi$ à π .



- 28) Justifier l'absence de termes en $\sin(n\alpha)$ dans le développement en série de Fourier du flux $F(\alpha)$.

D'après la question précédente, $F(\alpha)$ est une fonction paire de α donc tous les termes impaires en $\sin(n\alpha)$ sont d'amplitude nulle. On vérifie en substituant $F(\alpha)$ par son développement dans les intégrales que l'on retrouve bien les amplitudes $\hat{F}_n$, $n \geq 0$.

- 29) Montrer que, dans le problème étudié ici, l'amplitude $\hat{F}_n$ associée à une harmonique de rang $n \geq 1$ peut s'écrire sous la forme d'une intégrale entre 0 et $\pi/2$.

Comme le flux est une fonction paire, il est possible de remplacer l'intégrale entre $-\pi$ et π par le double de l'intégrale entre 0 et π . De plus, le flux est nul côté nuit pour α entre $\pi/2$ et π . Donc

$$\frac{\hat{F}_n}{F_S} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha.$$

- 30) Calculer $\hat{F}_1$.

| On trouve $\hat{F}_1 = \frac{1}{2}F_S$.

31) Donner l'expression de $\hat{F}_n$ pour $n \geq 2$. En déduire que pour tout $p \geq 1$,

$$\hat{F}_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad \hat{F}_{2p} = \frac{(-1)^{p+1}}{(4p^2 - 1)} \frac{2}{\pi} F_S. \quad (9)$$

| On trouve

$$\frac{\hat{F}_n}{F_S} = \frac{\sin((n+1)\pi/2)}{(n+1)\pi} + \frac{\sin((n-1)\pi/2)}{(n-1)\pi}.$$

Pour $n = 2p+1$, les numérateurs dans l'expression de $\hat{F}_n$ valent $\sin(p+1)\pi = 0$ et $\sin(p-1)\pi = 0$. Par conséquent, $\hat{F}_{2p+1} = 0$ quelque soit $p \geq 1$. Pour $n = 2p$, on obtient

$$\frac{\hat{F}_{2p}}{F_S} = \frac{\sin(p\pi + \pi/2)}{(n+1)\pi} + \frac{\sin(p\pi - \pi/2)}{(n-1)\pi},$$

or, $\sin(p\pi + \pi/2) = (-1)^p$ et $\sin(p\pi - \pi/2) = (-1)^{p+1}$. Par conséquent,

$$\frac{\hat{F}_{2p}}{F_S} = \left(\frac{1}{(n+1)\pi} - \frac{1}{(n-1)\pi} \right) (-1)^p.$$

| D'où le résultat.

32) Justifier que les harmoniques de rang $n \geq 3$ sont petites devant le terme fondamental $n = 1$. On pourra les négliger en première approximation.

| D'après ce qui précède, toutes les harmoniques de rang impaire sont nulles donc négligeables. De plus, les amplitudes des harmoniques paires décroissent comme $1/n^2$. Il suffit donc de vérifier que $\hat{F}_4$ est négligeable devant $\hat{F}_1$. Or $\hat{F}_4 = -\frac{2}{15\pi}F_S \approx -0.04F_S$. En valeur absolue, cette amplitude représente moins de 10% de l'amplitude $\hat{F}_1 = 0.5F_S$ du terme fondamental. On en conclut que les harmoniques de rang $n \geq 3$ sont bien négligeables devant le terme fondamental.

33) Évaluer numériquement le rapport de l'excitation semi-diurne ($\hat{F}_2$) sur l'excitation diurne ($\hat{F}_1$), c'est-à-dire le rapport $\hat{F}_2/\hat{F}_1$.

| On trouve $\hat{F}_2 = \frac{2}{3\pi}F_S$ et donc $\hat{F}_2/\hat{F}_1 = \frac{4}{3\pi} \approx 0.42$.

34) Sous l'effet du flux solaire, l'atmosphère se comporte comme un oscillateur forcé caractérisé par une fréquence propre. À partir de la figure 5 et du résultat de la question précédente, justifier que la période propre est plus proche de la période semi-diurne (12 h) que de la période diurne (24 h).

| D'après la figure, on peut lire que les amplitudes des oscillations barométriques diurne et semi-diurne sont de 0,29 mbar et 0,97 mbar, respectivement. Ainsi, le rapport $\hat{P}_2/\hat{P}_1$ vaut environ 3,3, ce qui est très supérieur au rapport des excitations $\hat{F}_2/\hat{F}_1 \approx 0.42$. On en déduit que l'harmonique de rang $n = 2$ a été fortement amplifiée et donc que la période semi-diurne est proche de la période résonante de l'oscillation libre de l'atmosphère.

II.2 Redistribution de masse

- 35) En chaque point du sol, on note $\Sigma(t)$ la masse d'atmosphère à l'instant t intégrée verticalement dans un cylindre de section unitaire d'une altitude $z = 0$ à une altitude $z \rightarrow \infty$:

$$\Sigma(t) = \int_0^\infty \rho(z, t) dz, \quad (10)$$

où $\rho(z, t)$ est la valeur de la densité de l'atmosphère à l'altitude z à l'instant t . Exprimer $\Sigma(t)$, en fonction de la pression de surface $P_s(t)$.

Par définition, $\Sigma = \int_0^\infty \rho(z) dz$. En utilisant la loi fondamentale de l'hydrostatique, on obtient

$$\Sigma = -\frac{1}{g} \int_0^\infty dP = \frac{P_s - P(\infty)}{g} = \frac{P_s}{g}$$

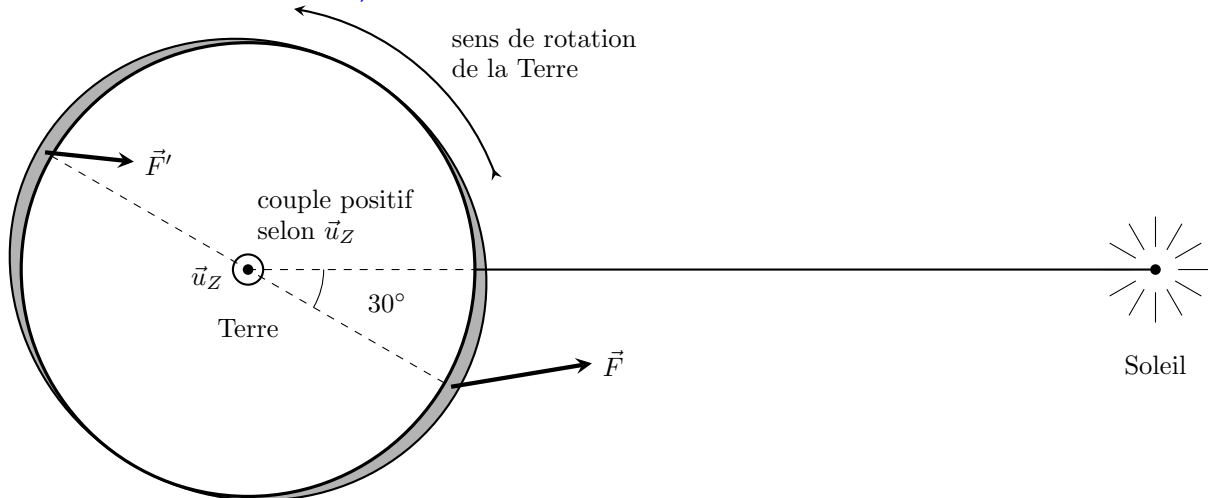
car $P(z \rightarrow \infty) = 0$.

- 36) On pose $\Sigma(\alpha) = \hat{\Sigma}_0 + \hat{\Sigma}_1 \cos(\alpha - \alpha_1) + \hat{\Sigma}_2 \cos(2(\alpha - \alpha_2))$. À l'aide de la figure 5, évaluer numériquement les amplitudes de marée $\hat{\Sigma}_1$ et $\hat{\Sigma}_2$ ainsi que les déphasages α_1 et α_2 correspondants.

À partir des amplitudes de pression $\hat{P}_1 = 0,29 \text{ mbar} = 29 \text{ Pa}$ et $\hat{P}_2 = 0,97 \text{ mbar} = 97 \text{ Pa}$, on obtient $\hat{\Sigma}_1 = 29/9,81 = 3,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$ et $\hat{\Sigma}_2 = 97/9,81 = 9,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$. Par ailleurs, les maxima ont lieu respectivement en $\alpha_1 = -97,5^\circ$ et $\alpha_2 = -30^\circ \pm 180^\circ$. On vérifie que l'indétermination de 180° sur α_2 est sans effet pour la distribution de masse car $\Sigma(\alpha)$ ne dépend de α_2 qu'à travers la combinaison d'angle $2(\alpha - \alpha_2)$. Ainsi, l'indétermination de $\pm 180^\circ$ n'introduit qu'un déphasage de $\pm 360^\circ$.

- 37) Faire un schéma représentant le soleil, la Terre et la composante semi-diurne de l'excès de masse surfacique $\hat{\Sigma}_2 \cos(2(\alpha - \alpha_2))$ à l'équateur à un instant donné sur le modèle de la figure 6. Étant donné le sens de rotation de la Terre, en déduire si le couple de marée tend à accélérer ou à décélérer la rotation de la Terre.

Le bourrelet étant en retard, il a tendance à accélérer la rotation de la Terre.



- 38) Vérifier que $\hat{\Sigma}_2 \approx 3,3\hat{\Sigma}_1 \ll m_T/R_T^2$.

| $\hat{\Sigma}_1 = 3,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$ et $\hat{\Sigma}_2 = 9,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$, donc $\hat{\Sigma}_2/\hat{\Sigma}_1 = 3.3$ et $m_T/R_T^2 = 1,5 \times 10^{11} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \gg \hat{\Sigma}_2$.

III Couple de marée

III.1 Développement multipolaire

- 39) Donner l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle dU entre un élément de masse dm de la planète située en M de vecteur position $\vec{r}_M$ et le soleil S situé en $\vec{r}_S$. En déduire l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle totale U d'interaction entre la planète et le soleil sous la forme d'une intégrale sur toute la masse de la planète.

donc,

$$dU = -\frac{\mathcal{G}m_S dm}{|\vec{r}_M - \vec{r}_S|}.$$

$$U = -\mathcal{G}m_S \int_{m_T} \frac{dm}{|\vec{r}_M - \vec{r}_S|}.$$

- 40) À partir d'un développement limité à l'ordre 2 en r_M/r_S , montrer que cette énergie potentielle peut s'écrire $U \approx U_0 + U_1 + U_2$ avec,

$$\begin{aligned} U_0 &= -\frac{\mathcal{G}m_S}{r_S} \int_{m_T} dm, & U_1 &= -\frac{\mathcal{G}m_S}{r_S} \int_{m_T} \frac{\vec{r}_M \cdot \vec{r}_S}{r_S^2} dm, \\ U_2 &= -\frac{\mathcal{G}m_S}{r_S} \int_{m_T} \frac{1}{2} \left(3 \left(\frac{\vec{r}_M \cdot \vec{r}_S}{r_S^2} \right)^2 - \frac{r_M^2}{r_S^2} \right) dm. \end{aligned} \quad (11)$$

Le résultat s'obtient en développant le dénominateur à l'intérieur de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}_M - \vec{r}_S|} &= \left(|\vec{r}_M - \vec{r}_S|^2 \right)^{-1/2} \\ &= \left(r_M^2 + r_S^2 - 2\vec{r}_M \cdot \vec{r}_S \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r_S} \left(1 - 2 \frac{\vec{r}_M \cdot \vec{r}_S}{r_S^2} + \frac{r_M^2}{r_S^2} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Or, $(1 + \epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\epsilon + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\epsilon^2 + \dots$. On en déduit

$$\frac{1}{|\vec{r}_M - \vec{r}_S|} = \frac{1}{r_S} \left(1 + \frac{\vec{r}_M \cdot \vec{r}_S}{r_S^2} - \frac{1}{2} \frac{r_M^2}{r_S^2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2} \left(-2 \frac{\vec{r}_M \cdot \vec{r}_S}{r_S^2} \right)^2 \right),$$

d'où le résultat.

- 41) Calculer les termes monopolaire et dipolaire U_0 et U_1 . Interpréter les résultats obtenus.

Le terme monopolaire s'écrit

$$U_0 = -\frac{\mathcal{G}m_S}{r_S} \int_{m_T} dm = -\frac{\mathcal{G}m_S m_T}{r_S}.$$

On reconnaît l'interaction Newtonienne entre deux masses ponctuelles. Pour le terme dipolaire, nous pouvons sortir $\vec{r}_S$ de l'intégrale, ce qui donne

$$U_1 = -\frac{\mathcal{G}m_S}{r_S} \frac{\vec{r}_S}{r_S^2} \cdot \int_{m_T} \vec{r}_M dm.$$

Or, l'intégrale est proportionnelle à la position du barycentre par rapport à lui-même : $\int_{m_T} \vec{r}_M dm = m_T \vec{G}G = \vec{0}$ donc $U_1 = 0$. Effectivement, comme il n'existe pas de masse négative en gravitation, le moment dipolaire de toute distribution de masse calculé par rapport au barycentre est nul.

- 42) Justifier que pour une distribution sphérique de masse le moment quadrupolaire U_2 est nul.

Pour une distribution sphérique de masse, il n'y a pas de direction privilégiée, les moments d'inertie $I_{//}$ et $I_{\perp}$ sont égaux, donc $U_2 = 0$.

- 43) L'étoile exerce un couple de marée Γ_{atm} sur la planète selon le vecteur $\vec{u}_Z$. Calculer le travail infinitésimal fourni par ce couple à la planète lorsque cette dernière pivote autour de l'axe $\vec{u}_Z$ d'un angle $d\beta$.

Le travail du couple Γ_{atm} est simplement $\delta W = \Gamma_{\text{atm}} d\beta$.

- 44) Relier ce travail à la variation d'énergie potentielle gravitationnelle dU . En déduire l'expression du couple dans le cas où l'énergie potentielle gravitationnelle est réduite à son terme quadrupolaire, c'est-à-dire, dans le cas où $U = U_2$.

Le travail est l'opposé de la variation d'énergie donc $\delta W = \Gamma_{\text{atm}} d\beta = -dU$. Par conséquent,

$$\Gamma_{\text{atm}} = -\frac{dU}{d\beta} = -\frac{dU_2}{d\beta} = 3 \frac{\mathcal{G}m_S(I_{//} - I_{\perp})}{r_S^3} \cos \beta \sin \beta.$$

III.2 Terme dipolaire

- 45) Calculer la position du barycentre G de cette planète dans le repère $(O, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$.

Par symétrie, le barycentre G se situe sur l'axe $\vec{u}_X$ de sorte que

$$(m_T + \delta m_1 - \delta m_1)X_G = m_T \times 0 + \delta m_1 R_T + (-\delta m_1)(-R_T).$$

On en déduit

$$X_G = \frac{2\delta m_1}{m_T} R_T.$$

- 46) On note $I_{//}$ le moment d'inertie de la planète $\mathcal{P}_1$ par rapport à l'axe $\vec{u}_X$ et $I'_{\perp}$ le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal à $\vec{u}_X$ passant par O . On posera I_0 le moment d'inertie de la planète $\mathcal{P}_1$ en l'absence d'anomalie de masse ($\delta m_1 = 0$).

a) Calculer le moment d'inertie $I_{//}$.

Les anomalies de masse sont sur l'axe $\vec{u}_X$ donc $I_{\parallel} = I_0$.

b) Calculer le moment d'inertie $I'_{\perp}$.

Cette fois, il faut tenir compte des anomalies de masse. Par linéarité,

$$I'_{\perp} = I_0 + \delta m_1 R_T^2 + (-\delta m_1)(-R_T)^2 = I_0.$$

On constate que la redistribution dipolaire de masse ne modifie pas l'inertie de la planète par rapport au centre géométrique. Mais, du fait du décalage du barycentre, par le théorème de Huygens, le moment d'inertie calculée par rapport au barycentre sera affectée.

c) Calculer le moment d'inertie $I_{\perp}$ par rapport à un axe orthogonal à $\vec{u}_X$ mais passant le barycentre G de la planète $\mathcal{P}_1$.

Par le théorème de Huygens,

$$I_{\perp} = I'_{\perp} - m_T d^2,$$

avec $d = |X_G| = 2 \frac{\delta m_1}{m_T} R_T$, donc,

$$I_{\perp} = I_0 - 4 \left(\frac{\delta m_1}{m_T} \right) \delta m_1 R_T^2.$$

III.3 Terme quadrupolaire

47) Calculer la position du barycentre de la planète $\mathcal{P}_2$ dans le repère $(O, \vec{u}_X, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$.

La planète est symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{u}_X)$ et par rapport au plan $(O, \vec{u}_Y, \vec{u}_Z)$, donc le barycentre G est confondu avec le point O.

48) On note $I_{\parallel}$ le moment d'inertie de la planète $\mathcal{P}_2$ par rapport à l'axe $\vec{u}_X$ et $I_{\perp}$ le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal à $\vec{u}_X$ passant par G. On posera I_0 le moment d'inertie de la planète $\mathcal{P}_2$ en l'absence d'anomalies de masse ($\delta m_2 = 0$).

a) Calculer le moment d'inertie $I_{\parallel}$. Commenter le résultat.

Par définition,

$$I_{\parallel} = I_0 - 2\delta m_2 R_T^2.$$

Le moment d'inertie est plus faible que celui de la planète sans anomalies de masse car l'anneau de masse négative tend à concentrer la masse de la planète vers l'axe $\vec{u}_X$.

b) Montrer que le moment d'inertie d'un cercle de masse δm et de rayon R par rapport à un de ses diamètres vaut $\frac{1}{2} \delta m R^2$.

Posons $\lambda = \delta m / (2\pi R)$ la masse linéique de la distribution. Par définition, le moment d'inertie I vaut

$$I = \int_{\delta m} d^2 dm$$

avec $d = R|\sin \theta|$, $dm = \lambda R d\theta$ et θ variant de 0 à 2π . Par symétrie, on peut prendre 2 fois l'intégrale de 0 à π . On obtient alors

$$I = 2 \int_0^\pi R^2 \sin^2(\theta) \lambda R d\theta.$$

En utilisant la formule de trigonométrie $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$, cela donne

$$I = \lambda R^3 \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta = \pi \lambda R^3 = \frac{1}{2} \delta m R^2.$$

c) Calculer le moment d'inertie $I_\perp$.

D'après ce qui précède,

$$I_\perp = I_0 + 2\delta m_2 R_T^2 + \frac{1}{2}(-2\delta m_2) R_T^2 = I_0 + \delta m_2 R_T^2.$$

III.4 Amplitude du couple de marée actuel

- 49) En vous aidant des questions 38, 46 et 48, justifier que la redistribution de masse dipolaire a un effet négligeable devant la redistribution de masse quadrupolaire sur le potentiel gravitationnel U_2 (équation (12)) de la planète. Dans la suite, on ne considérera que la redistribution de masse quadrupolaire et on prendra $\beta = \alpha_2$ où α_2 est défini à la question 36.

D'après la question 38 et les expressions des anomalies de masse, δm_1 et δm_2 sont du même ordre de grandeur et très petites devant la masse de la planète m_T . Or le terme dipolaire contient un facteur $\delta m_1/m_T \ll 1$, il est donc négligeable dans le terme quadrupolaire. On peut donc négliger le terme diurne pour les calculs du potentiel et du couple de marée.

- 50) En déduire le potentiel gravitationnel de la planète $\mathcal{P}_2$ à l'ordre quadrupolaire, puis le couple de marée.

On trouve

$$U = -\frac{\mathcal{G}m_S}{r_S} - \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}m_S \delta m_2 R_T^2}{r_S^3} (3 \cos^2 \beta - 1).$$

et

$$T = -\frac{dU}{d\beta} = -9 \frac{\mathcal{G}m_S \delta m_2 R_T^2}{r_S^3} \cos \beta \sin \beta.$$

- 51) Évaluer numériquement et discuter le signe du couple de marée thermique atmosphérique en vous appuyant sur le résultat de la question 36. Comparer la valeur obtenue à celle du couple de marée océanique actuel $\Gamma_{\text{océan}} = -4,5 \times 10^{16} \text{ N} \cdot \text{m}$.

On trouve

$$T = 2,8 \times 10^{15} \text{ N} \cdot \text{m},$$

ce qui est environ seize fois plus faible que le couple de marée océanique.

- 52) Au Précambrien, le couple de marée océanique était réduit d'un facteur 4 et le couple de marée thermique atmosphérique a pu être amplifié par une résonance. Estimer l'amplification résonante nécessaire pour que les deux couples s'annulent mutuellement.

| Environ un facteur 4 car $\Gamma_{\text{océan}}/4 \approx 11 \times 10^{15} \text{ N} \cdot \text{m}$ et $11 \times 10^{15}/2,8 \times 10^{15} = 3,9$.

IV Évolution de l'amplitude du couple de marée

- 53) Question préliminaire : détermination de la valeur numérique ψ_0 de la phase ψ à la fréquence de marée actuelle ω_0 .

- a) Lorsque l'insolation δF est maximale à $t = 0$ au niveau du méridien de Greenwich ($\phi = 0$), d'après l'expression de $\delta P(t, \phi)$, à quelle longitude ϕ_0 (modulo 180 deg) le maximum de pression est-il atteint? On donnera la réponse en fonction de la phase $\psi(\omega)$.

| La variation de pression vaut

$$\delta P(t, \phi) = A \delta F_2 \cos(\omega t + 2\phi + \psi).$$

| Le maximum correspond à une phase nulle, il est obtenu pour $\omega t + 2\phi + \psi = 0$. Ainsi, à $t = 0$, la longitude ϕ_0 du maximum de pression est solution de $2\phi + \psi = 0$, ce qui donne $\phi_0 = -\psi(\omega)/2$.

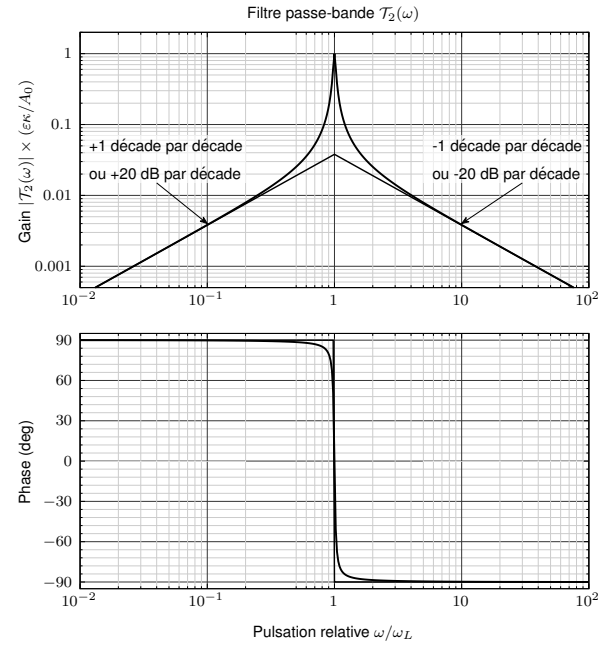
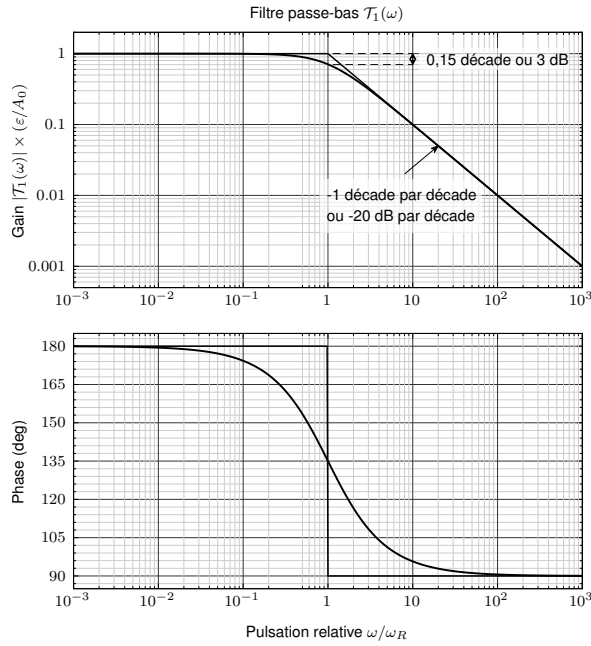
- b) Cette longitude ϕ_0 correspond à la phase α_2 de la partie II. En déduire la valeur numérique ψ_0 de ψ à la fréquence de marée actuelle ω_0 .

| Nous avons trouvé $\alpha_2 = -30 \text{ deg}$. On en déduit $\psi_0 = +60 \text{ deg} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

- 54) À quels types de filtre correspondent les deux termes de l'équation (23)? On précisera leurs principales caractéristiques.

| Le premier terme est un filtre passe-bas de gain A_0/ε et de pulsation de coupure ω_R . Le second est un filtre passe bande de gain $A_0/(\varepsilon\kappa)$, de pulsation propre ω_L et de facteur de qualité $Q = 1/(\varepsilon\kappa)$.

- 55) Représenter les diagrammes de Bode en amplitude et en phase de ces deux filtres en indiquant les points et caractéristiques remarquables de ce diagramme.



56) Donner l'expression de la partie imaginaire de $\underline{\mathcal{T}}(\omega)$.

Le résultat est

$$\text{Im}(\underline{\mathcal{T}}(\omega)) = \frac{A_0}{\varepsilon} \frac{\omega/\omega_R}{1 + (\omega/\omega_R)^2} - A_0 \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_L} - \frac{\omega_L}{\omega}\right)}{(\varepsilon\kappa)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_L} - \frac{\omega_L}{\omega}\right)^2}$$

57) Calculer les valeurs extrémales de la partie imaginaire de chacun des termes de l'équation (23) et les pulsations ω correspondantes. Pour $\text{Im}(\underline{\mathcal{T}}_2(\omega))$, on cherchera les valeurs extrémales à des pulsations proches de ω_L dont les expressions seront données au premier ordre en $\varepsilon\kappa$.

Nous avons deux fonctions de la forme

$$f(x) = C \frac{u(x)}{a^2 + u(x)^2}.$$

La dérivée de cette fonction vaut

$$f'(x) = u'(x)C \frac{a^2 - u(x)^2}{(a^2 + u(x)^2)^2}.$$

Les extrema ont lieu en $u(x) = \pm a$ et valent $\pm C/(2a)$ (on vérifie que $u'(x)$ est toujours non nul). Pour le filtre passe-bas, seul le maximum est atteint pour des pulsations positives et vaut

$$f_{\max}^{\text{bas}} = \frac{A_0}{2\varepsilon}.$$

La pulsation correspondante est

$$\omega_{\max}^{\text{bas}} = \omega_R.$$

Pour le filtre passe-bande, les gains extrémaux sont

$$f_{\min}^{\text{bande}} = -\frac{A_0}{2\varepsilon\kappa} \quad \text{et} \quad f_{\max}^{\text{bande}} = +\frac{A_0}{2\varepsilon\kappa},$$

et les pulsations correspondantes sont solutions de

$$\frac{\omega_1^{\text{bande}}}{\omega_L} - \frac{\omega_L}{\omega_1^{\text{bande}}} = +\varepsilon\kappa \quad \text{et} \quad \frac{\omega_2^{\text{bande}}}{\omega_L} - \frac{\omega_L}{\omega_2^{\text{bande}}} = -\varepsilon\kappa.$$

Commençons par résoudre l'équation

$$x - \frac{1}{x} = a \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - ax - 1 = 0.$$

On obtient

$$x = \frac{a \pm \sqrt{4 + a^2}}{2} = \pm 1 + \frac{a}{2} + o(a).$$

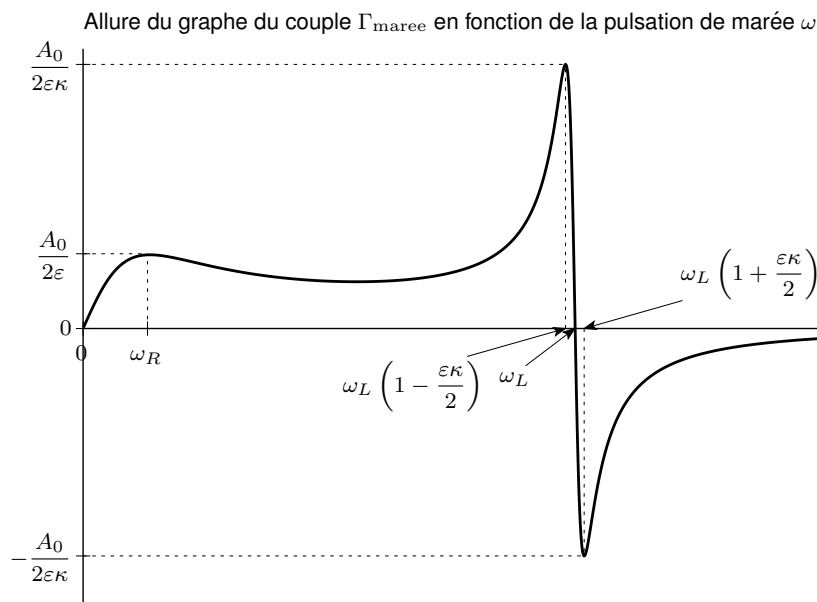
Par conséquent, en ne gardant que les pulsations positives, $f_{\min}^{\text{bande}}$ est obtenu en

$$\omega_{\min}^{\text{bande}} = \omega_L \left(1 + \frac{\varepsilon\kappa}{2} \right),$$

et, de même, $f_{\max}^{\text{bande}}$ se situe en

$$\omega_{\max}^{\text{bande}} = \omega_L \left(1 - \frac{\varepsilon\kappa}{2} \right).$$

58) Tracer l'allure du graphe du couple en fonction de la pulsation ω pour $\omega \geq 0$.



59) Donner la valeur numérique de $X_0 = \omega_0/\omega_L$ calculée avec la vitesse de rotation de la Terre actuelle.

Avec $\omega_0 = 4\pi/(86\,400\text{ s})$, on obtient $X_0 = 0,965$.

60) Justifier que $\mathcal{T}_1(\omega)$ est négligeable devant $\mathcal{T}_2(\omega)$ dans l'équation (23) lorsque l'on étudie le couple de marée thermique atmosphérique au voisinage de la pulsation de marée actuelle.

Au voisinage de $X = 1$ et donc de $\omega = \omega_L$, la partie imaginaire du premier terme vaut de l'ordre de A_0 alors que la partie imaginaire du second terme atteint des valeurs extrêmes de l'ordre de $A_0/(2\varepsilon\kappa) \gg A_0$.

61) Que peut-on dire du couple de marée lorsque $\omega = \omega_L$?

Il n'y a pas de couple car le bourrelet de marée est aligné avec l'axe Terre-Soleil (la phase du filtre passe-bande est nulle).

62) Évaluation du terme de dissipation.

a) Donner l'expression de la phase actuelle ψ_0 de la fonction de transfert en fonction de X_0 et des données du problème.

On trouve

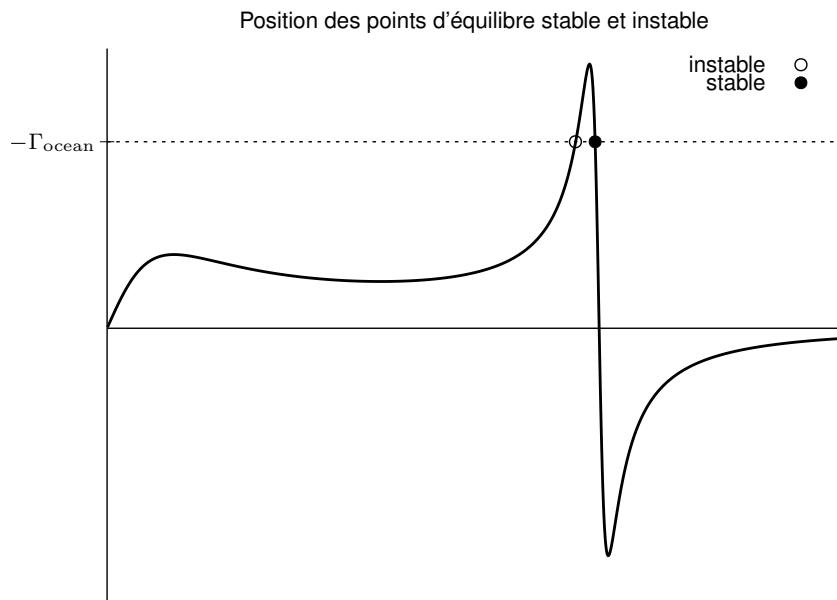
$$\psi_0 = -\text{Arctan}\left(\frac{X_0 - 1/X_0}{\varepsilon\kappa}\right).$$

b) En déduire l'expression de ε . Faire l'application numérique.

$$\varepsilon = -\frac{1}{\kappa} \frac{X_0 - 1/X_0}{\tan(\psi_0)}.$$

A.N. : $\varepsilon = 0,257$.

63) En supposant que les marées océaniques (non traitées dans ce problème) produisent un couple $\Gamma_{\text{océan}} < 0$ dont la valeur absolue est inférieure à la valeur maximale de Γ_{atm} , indiquer sur le graphe du couple le ou les points d'équilibre stable.



Pour savoir un équilibre est stable, il suffit de considérer une petite perturbation de la vitesse de rotation de la Terre qui se traduit par un petit $\delta\omega$ que l'on supposera positif. Pour que l'équilibre soit stable, il faut que le couple total $\Gamma_{\text{atm}} + \Gamma_{\text{océan}}$ soit négatif de sorte à ramener $\omega + \delta\omega$ vers la position d'équilibre. On conclut qu'un point fixe est stable si la dérivée du couple total en ce point est négative.

- 64) Sur cette même courbe, où se situe le point correspondant à la valeur actuelle de la rotation de la Terre ?

La Terre se situe en $X_0 = 0.965$. La position du maximum est en $X_{\max} = 1 - \varepsilon\kappa/2 = 0.981$. Le point correspondant à la valeur actuelle de la rotation de la Terre se situe donc légèrement à gauche du maximum.

- 65) Calculer le facteur d'amplification du couple de marée thermique atmosphérique $\eta = \Gamma_{\text{atm}}^{\max}/\Gamma_{\text{atm}}^0$ entre la valeur actuelle Γ_{atm}^0 et la valeur maximale $\Gamma_{\text{atm}}^{\max}$ en fonction de X_0 , ε et κ . Faire l'application numérique.

L'amplification vaut

$$\eta = \frac{\Gamma_{\text{atm}}^{\max}}{\Gamma_{\text{atm}}^0} = -\frac{A_0}{2\varepsilon\kappa} \cdot \frac{(\varepsilon\kappa)^2 + (X_0 - 1/X_0)^2}{A_0(X_0 - 1/X_0)} = -\frac{(\varepsilon\kappa)^2 + (X_0 - 1/X_0)^2}{2\varepsilon\kappa(X_0 - 1/X_0)}.$$

A.N. : $\eta = \Gamma_{\text{atm}}^{\max}/\Gamma_{\text{atm}}^0 = 1,20$.

- 66) Étant donné le résultat obtenu à la question 52, conclure sur la possibilité d'un blocage de la vitesse de rotation de la Terre durant le Précambrien : $\Gamma_{\text{atm}} + \Gamma_{\text{ocean}} = 0$.

Avec seulement 20 % d'amplification obtenu à la question précédente, nous sommes très loin du facteur 4 nécessaire au blocage (en utilisant la solution exacte des équations primitives, nous aurions obtenu une amplification encore plus faible : seulement 5 %). Nous pourrions donc conclure que le blocage n'a jamais eu lieu. Il faudrait toutefois prendre en compte l'évolution des propriétés de l'atmosphère dans le passé (composition, température, ...) et s'assurer que même dans ce cas, le facteur 4 n'est pas atteint.

FIN DE L'ÉPREUVE

