

Correction de la composition de physique - Session 2026

Étude d'écoulements tourbillonnaires en géophysique

I. Étude d'écoulements tourbillonnaires océaniques

I.A - Résultats généraux de dynamique des fluides

- Q1.** On considère un volume mésoscopique $\mathcal{V}$ de l'écoulement, centré au point M et délimité par une surface fermée $\mathcal{S}$. Entre les instants t et $t + dt$, la variation de masse de ce système est égale au flux de masse entrant par la surface fermée $\mathcal{S}$, soit :

$$dm = - \oint_{\mathcal{S}} \vec{j}_m \cdot \vec{n}_{\text{ext}} d\mathcal{S} dt$$

où $\vec{j}_m = \mu \vec{v}$ est le vecteur densité de courant massique de l'écoulement.

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, il vient :

$$dm = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{j}_m) d\mathcal{V} dt$$

La variation de masse du système entre les instants t et $t + dt$ est quant à elle définie par :

$$dm = m(t + dt) - m(t)$$

$$\text{soit : } dm = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t} dt d\mathcal{V}$$

On en déduit l'équation locale de conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_m) = 0}$$

- Q2.** Un champ vectoriel $\vec{A}$ à flux conservatif vérifie : $\boxed{\text{div}(\vec{A}) = 0}$.

Pour un fluide incompressible, l'écoulement est incompressible. Au sein de cet écoulement, chaque particule de fluide conserve un volume constant au cours de son mouvement. Les particules de fluide se déforment donc sans variation de masse volumique :

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0$$

En reprenant l'équation locale de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\mu) + \mu \text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu \text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\text{soit : } \boxed{\text{div}(\vec{v}) = 0}$$

On en déduit que le champ des vitesses est bien à flux conservatif et que le débit volumique est conservé à travers toute section d'un tube de courant.

- Q3.** L'accélération d'une particule de fluide correspond à la dérivée particulaire du champ vectoriel des vitesses. Pour l'écoulement unidimensionnel proposé :

$$\vec{a}(x, t) = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(x + dx, t + dt) - \vec{v}(x, t)}{dt}$$

On réalise un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$\vec{v}(x + dx, t + dt) = \vec{v}(x, t) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx$$

Ainsi :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{a}(x, t) = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}}$$

Dans le cas d'un écoulement quelconque :

$$\boxed{\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}}$$

Accélération locale Accélération convective

- Q4.** On applique la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide, de volume mésoscopique dV et de masse $dm = \mu dV$ constante, soumise à la résultante des forces volumiques extérieures $\vec{f}_v$, dans le référentiel ($\mathcal{R}$) :

$$dm \vec{a}(M)_{/(\mathcal{R})} = \vec{f}_v dV + d\vec{F}_{\text{pression}} + d\vec{F}_{\text{viscosité}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d\vec{F}_{\text{pression}} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) dV \\ d\vec{F}_{\text{viscosité}} = \eta \Delta \vec{v} dV \end{cases}$$

En utilisant l'expression de l'accélération déterminée à la question précédente et en simplifiant par le volume de la particule de fluide, on obtient l'équation de Navier-Stokes :

$$\boxed{\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = \vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v}}$$

- Q5.** Les forces de viscosité sont à l'origine d'un **transport diffusif** de la quantité de mouvement.

Par son déplacement, une particule de fluide contribue également à un **transport convectif** de la quantité de mouvement via le terme d'accélération convective.

On peut former le rapport des ordres de grandeur des normes des vecteurs densité de courant correspondants pour évaluer l'importance relative de ces deux modes de transport :

$$\frac{\|\mu(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \sim \frac{\frac{\mu V^2}{L}}{\frac{\eta V}{L^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\text{Re} = \frac{\mu V L}{\eta} = \frac{\|\mu(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|}}$$

Ainsi le nombre de Reynolds traduit la prédominance des effets convectifs sur les effets diffusifs au sein de l'écoulement.

I.B - Étude des maëlstroms du détroit de Saltstraumen

- Q6.** Le nombre de Reynolds associée à cette situation vaut :

$$\text{Re} = \frac{\mu_{\text{eau}} V L}{\eta_{\text{eau}}} = 10^7 \text{ à } 10^8 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \\ L = 5 \text{ ou } 10 \text{ m} \end{cases}$$

$\text{Re} \gg 1$ donc on peut négliger le terme diffusif dans l'équation de Navier-Stokes et modéliser l'écoulement du maëlstrom par un écoulement parfait.

- Q7.** Les équations locales de Maxwell vérifiées par le champ magnétostatique sont les équations de Maxwell-Thomson et de Maxwell-Ampère :

$$\boxed{\text{div}(\vec{B}) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}}$$

Le champ magnétique vérifie donc un système d'équations analogue à celui du champ des vitesses pour un écoulement incompressible (puisque $\text{div}(\vec{v}) = 0$) et rotationnel (puisque $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\Omega}$). L'analogie électromagnétique du vecteur tourbillon est donc le vecteur $\mu_0 \vec{j}$.

Q8. On intègre l'équation de Maxwell-Ampère sur une surface S délimitée par un contour fermé et orienté (Γ) :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot \vec{n} \, dS = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$$

En notant I_{int} l'intensité des courants passant à travers la surface délimitée par le contour d'Ampère (Γ), comptés algébriquement selon la règle de la main droite, et en appliquant le théorème de Stokes-Ampère, on obtient le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Q9. On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

La distribution de courant étant invariante par translation le long de l'axe (Oz) et par rotation autour de cet axe, le principe de Curie permet d'affirmer que les composantes du champ magnétique ne dépendent que de r . De plus, tout plan contenant le fil est plan de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique étant perpendiculaire à ces plans, il est orthoradial :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_{\theta}$$

Q10. On choisit comme contour d'Ampère un cercle perpendiculaire au fil, de rayon r et orienté dans le sens trigonométrique. L'application du théorème d'Ampère conduit alors à :

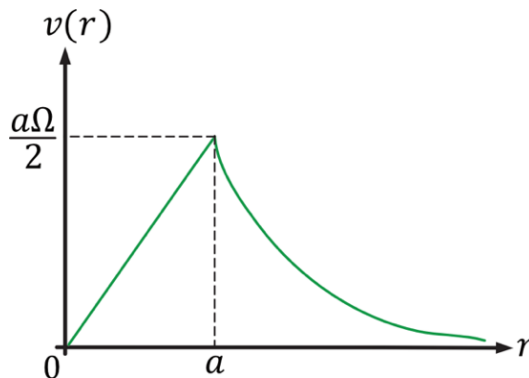
$$2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{int}}$$

$$\text{soit : } \vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 r j}{2} \vec{u}_{\theta} & (r \leq a) \\ \frac{\mu_0 a^2 j}{2r} \vec{u}_{\theta} & (r > a) \end{cases}$$

Q11. En s'appuyant sur l'analogie proposée en **Q7** :

$$v(r) = \begin{cases} \frac{r\Omega}{2} & (r \leq a) \\ \frac{a^2\Omega}{2r} & (r \geq a) \end{cases}$$

La vitesse est nulle en $r = 0$ (il n'y a donc pas de vent au centre du cylindre, d'où l'appellation « l'œil du cyclone ») et maximale en $r = a$.



Q12. L'écoulement irrotationnel, parfait, stationnaire et incompressible, d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur orienté par l'axe (Oz) ascendant, satisfait au théorème de Bernoulli, qui traduit la loi de conservation de l'énergie entre deux points A et B quelconques de l'écoulement.

L'écoulement étant supposé parfait et stationnaire, soumis uniquement aux forces de pesanteur, l'équation de Navier-Stokes se simplifie en :

$$\mu(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

Pour un écoulement irrotationnel :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mu \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) &= -\overrightarrow{\text{grad}}(\mu g z) - \overrightarrow{\text{grad}}(P) \\ \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 + \mu g z + P \right) &= \vec{0} \end{aligned}$$

En intégrant entre deux points A et B quelconques de l'écoulement :

$$\boxed{\frac{1}{2} \mu v_A^2 + \mu g z_A + P_A = \frac{1}{2} \mu v_B^2 + \mu g z_B + P_B}$$

Q13. L'écoulement est supposé incompressible, stationnaire, parfait (car les effets de viscosité sont négligeables d'après la valeur numérique du nombre de Reynolds calculée en **Q6**) et homogène. L'écoulement étant de plus irrotationnel en tout point extérieur au maelstrom, on peut appliquer le théorème de Bernoulli généralisé :

$$\frac{1}{2} \mu v^2 + \mu g z + P = c^{\text{ste}}$$

Entre le point courant (de vitesse $v(r)$ et de pression P) et un point situé en surface à très grande distance du maelström (de vitesse $v(\infty) \rightarrow 0$, d'altitude $z = 0$ et de pression P_0), on obtient donc :

$$\frac{1}{2} \mu v(r)^2 + \mu g z + P(r, z) = P_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{P(r \geq a, z) = P_0 - \mu g z - \frac{\mu a^4 \Omega^2}{8 r^2}}$$

Q14. Dans le maelstrom, le mouvement de l'eau est circulaire de vitesse angulaire constante, donc l'accélération est centripète de norme $r\Omega^2/4$. Ainsi, l'équation de Navier-Stokes s'écrit, en négligeant toujours les effets de viscosité (écoulement tourbillonnaire à haut nombre de Reynolds) :

$$-\frac{\mu r \Omega^2}{4} \vec{u}_r = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

On en déduit, par projection sur les différents axes :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\mu r \Omega^2}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\mu g$$

Ainsi :

$$P(r, z) = -\mu g z + \frac{\mu r^2 \Omega^2}{8} + C$$

où la constante d'intégration C est déterminée par continuité de la pression en $r = a$.

$$P_0 - \mu g z - \frac{\mu a^2 \Omega^2}{8} = -\mu g z + \frac{\mu a^2 \Omega^2}{8} + C$$

On obtient finalement :

$$\boxed{P(r \leq a, z) = P_0 - \mu g z + \mu \Omega^2 \left(\frac{r^2}{8} - \frac{a^2}{4} \right)}$$

Q15. Dans le maelstrom, la surface libre de la mer vérifie l'équation d'une parabole :

$$P(r, z) = P_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{z(r) = \frac{\Omega^2}{g} \left(\frac{r^2}{8} - \frac{a^2}{4} \right)}$$

Le maelstrom crée donc un creux, dont la profondeur est maximale en $r = 0$, de hauteur (en valeur absolue) :

$$\begin{aligned} \boxed{H = \frac{\Omega^2 a^2}{4g} = \frac{V^2}{g}} \\ \text{soit} \quad \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{4gH}{a^2}}} = 1,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

La particule fait donc un tour de maëlstrom en :

$$\Delta t = \frac{4\pi}{\Omega} = 9 \text{ s}$$

I.C - Étude d'allées tourbillonnaires de von Kármán

I.C.1 - Allée de von Kármán observée dans un film de savon

- Q16.** Le contraste d'un phénomène d'interférences est maximal lorsque les rayons qui interfèrent possèdent la même intensité et décroît rapidement si les intensités des rayons diffèrent.

Dans la situation présentée sur la **Figure 3**, en notant I_0 l'intensité du rayon incident :

- ▷ l'intensité du rayon 1 vaut (1 réflexion) : $I_1 = r^2 I_0 = 0,028 I_0$
- ▷ l'intensité du rayon 2 vaut (2 transmissions et 1 réflexion) : $I_2 = t^2 r^2 t'^2 I_0 = 0,027 I_0$
- ▷ l'intensité du rayon 3 vaut (2 transmissions et 3 réflexion) : $I_3 = t^2 r^6 t'^2 I_0 = 2,3 \times 10^{-5} I_0$

Seuls les deux premiers rayons possèdent des intensités suffisamment proches pour participer au phénomène d'interférences avec un bon contraste.

- Q17.** Pour un faisceau parfaitement collimaté parvenant en incidence normale, la différence de marche géométrique entre les deux premiers rayons s'écrit :

$$\delta = 2ne$$

Dans le déphasage global, il ne faut pas oublier le déphasage supplémentaire de π (dû à la réflexion vitreuse du rayon 1 sur un milieu plus réfringent). Ainsi :

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi ne}{\lambda_0} + \pi$$

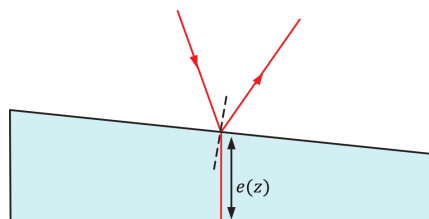
- Q18.** Juste avant d'éclater, l'épaisseur de la bulle tend vers 0 donc $\Delta\varphi = \pi$.

Les deux rayons lumineux sont donc en condition d'interférences destructives et la bulle apparaît noire.

- Q19.** Dans une expérience d'interférences, lorsqu'on augmente la taille de la source primaire, le phénomène d'interférences devient moins visible car la différence de marche $\delta(M)$ en un point d'observation fixé M dépend du point source choisi. Les franges d'interférences dues aux différents points sources sont décalées et se brouillent. Dans la plupart des cas, lorsque la source est spatialement trop étendue, le contraste devient tellement faible que les interférences ne sont plus visibles. Ce brouillage est fortement atténué lorsque les deux rayons qui interfèrent au point d'observation sont partis de la source dans la même direction. Cela est impossible dans le cas d'un dispositif interférentiel à division du front d'onde, mais cela est possible pour un dispositif interférentiel à division d'amplitude (comme c'est le cas ici pour la lame de savon).

- Q20.** Dans le cas d'une lame de savon à faces parallèles, la figure d'interférences est localisée à l'infini (comme pour l'interféromètre de Michelson en configuration lame d'air) et il est possible de la visualiser en se plaçant dans le plan focal image d'une lentille convergente.

- Q21.** Comme indiqué dans le sujet, on suppose que le rayon arrive en incidence normale sur le dioptre inférieur. On a donc la situation suivante :



La différence de marche géométrique entre les deux rayons interférant au point M s'écrit donc :

$$\delta(M) = 2ne(z_A)$$

En ajoutant le déphasage dû à la réflexion :

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) + \pi \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(2ne(z_A) + \frac{\lambda_0}{2} \right)}$$

Q22. Dans le cas d'une lame de savon à faces parallèles non parallèles, la figure d'interférences est localisée au voisinage de la lame (comme pour l'interféromètre de Michelson en configuration coin d'air) et il est possible de la visualiser en conjuguant la face supérieure de la lame sur un écran à l'aide d'une lentille convergente.

Q23. Pour que la figure d'interférences possède un bon contraste, il faut que les intensités des deux rayons qui interfèrent soient proches.

On peut déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude à chaque interface :

$$r(\text{air} \rightarrow \text{savon}) = r = -0,17 \quad \text{et} \quad t(\text{air} \rightarrow \text{savon}) = t = 0,83$$

$$r(\text{savon} \rightarrow \text{air}) = r' = +0,17 \quad \text{et} \quad t(\text{savon} \rightarrow \text{air}) = t' = 1,17$$

On en déduit les intensités des deux premiers rayons lumineux interférant dans chaque configuration.

▷ En réflexion (**Figure 5a**), les intensités des deux rayons qui interfèrent sont respectivement :

$$I_1 = r^2 I_0 = 0,029 I_0 \approx I_2 = t^2 r'^2 t'^2 I_0 = \mathbf{0,027 I_0}$$

▷ En transmission (**Figure 5b**), les intensités des deux rayons qui interfèrent sont respectivement :

$$I_1 = t^2 t'^2 I_0 = 0,94 I_0 \gg I_2 = t^2 r^2 r'^2 t'^2 I_0 = \mathbf{7,7 \times 10^{-4} I_0}$$

Q24. L'ordre d'interférences d'une frange brillante est entier. En le notant p , avec $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(2ne(z_A) + \frac{\lambda_0}{2} \right) = 2p\pi$$

$$\text{soit : } \boxed{e(z_A) = \frac{2p-1}{4n} \lambda_0}$$

Q25. L'épaisseur de la lame de savon est décroissante selon l'axe vertical ascendant puisque les franges s'écartent, ce qui est cohérent avec une augmentation de l'épaisseur sous l'effet du champ de pesanteur.

Les mesures d'épaisseur dans le rouge et dans le bleu sont légèrement différentes du fait de la variation d'indice optique avec la longueur d'onde (l'eau savonneuse est un milieu dispersif).

Q26. On suppose qu'une variation d'épaisseur Δe est mesurable si elle engendre une variation de l'ordre d'interférences $\Delta p \approx 0,1$ à $0,5$. Ainsi :

$$\boxed{\Delta e = \frac{\lambda_0}{2n} \Delta p} = \begin{cases} \mathbf{20 \text{ à } 125 \text{ nm}} & \text{dans le rouge} \\ \mathbf{15 \text{ à } 80 \text{ nm}} & \text{dans le bleu = meilleure sensibilité} \end{cases}$$

Q27. Si on observe la lame de savon en lumière blanche, chaque longueur d'onde du spectre produit son propre système de franges (puisque elle est incohérente avec les autres longueurs d'onde). Les interférences étant tous différents, les interférences créées par chaque longueur d'onde présente dans le spectre de la lumière blanche se superposent en étant légèrement décalées et il y a brouillage total au-delà d'une différence de marche égale à la longueur de cohérence temporelle de la source.

Ce brouillage apparaît lorsque l'ordre d'interférences entre les longueurs d'onde extrêmes du spectre de la source diffèrent de plus de 1. Les franges restent donc observables si :

$$\Delta p_{\max} = \frac{2ne_{\max}}{\lambda(\text{violet})} - \frac{2ne_{\max}}{\lambda(\text{rouge})} = p(\text{violet}) - p(\text{rouge}) \leq 1$$

$$\text{soit : } \boxed{e_{\max} = \frac{\lambda(\text{rouge})\lambda(\text{violet})}{2n[\lambda(\text{rouge}) - \lambda(\text{violet})]}} \approx \mathbf{300 \text{ nm}}$$

Q28. Le nombre de Strouhal peut s'interpréter comme le rapport :

▷ du temps $\tau_1 = d/v_t$ mis par l'écoulement pour parcourir la distance d par convection

▷ du temps $\tau_2 = 1/f$ correspondant à la période d'émission des tourbillons.

- Q29.** La fréquence à laquelle sont émis les tourbillons de l'allée de von Kármán dans l'expérience de la **Figure 3** se déduit à partir de la valeur du nombre de Strouhal :

$$f = \text{St} \frac{v_t}{d} = 1 \text{ Hz} \text{ avec } \begin{cases} \text{St} = 0,22 \\ d = 2 \text{ mm} \\ v_t = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement dans cette expérience vaut :

$$\text{Re} = \frac{\mu_{\text{eau}} V_{\infty} d}{\eta_{\text{eau}}} = 40 \text{ (non tourbillonnaire)}$$

I.C.2 - Une allée de Von Kármán océanique

- Q30.** Le champ magnétostatique produit par un unique fil rectiligne parcouru par un courant d'intensité I est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_{\theta}$$

- Q31.** Les lignes de champ magnétique s'enroulent autour des fils de courant en respectant la règle de la main droite. Par analogie, on en déduit que les courants I_1, I_3 et I_5 sont dirigés selon $-\vec{u}_z$ alors que les courants I_2 et I_4 sont dirigés selon $+\vec{u}_z$.

- Q32.** On cherche le champ magnétique créé au niveau du fil n°3 par ses quatre plus proches voisins.

En appliquant le théorème de superposition :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_y + \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_y - 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}} \times \frac{b}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}} \vec{u}_x$$

Ainsi :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I b}{\pi \left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)} \vec{u}_x$$

En utilisant l'analogie hydromagnétique et en ajoutant par superposition la contribution du courant incident, on obtient finalement :

$$\vec{v}_t = V_{\infty} \vec{u}_x - \frac{V_{\infty} D b}{\frac{a^2}{4} + b^2} \vec{u}_x \text{ soit } \vec{v}_t = V_{\infty} \left(1 - \frac{D b}{\frac{a^2}{4} + b^2} \right) \vec{u}_x$$

- Q33.** D'après la **Figure 8** :

$$a = 20 \text{ à } 40 \text{ km} ; b = 10 \text{ à } 30 \text{ km} ; D = 7 \text{ km}$$

- Q34.** On a :

$$\frac{v_t}{V_{\infty}} = 1 - \frac{D b}{\frac{a^2}{4} + b^2} = 0,65 \text{ à } 0,90$$

La fréquence d'émission des tourbillons derrière l'archipel Juan Fernández vaut donc :

$$f = \frac{v_t}{a} \sim 10^{-4} \text{ Hz}$$

Le nombre de Strouhal associé est légèrement supérieur à la valeur de 0,22 théorique dans une allée tourbillonnaire de von Kármán :

$$\text{St} = \frac{f D}{v_t} = 0,2 \text{ à } 0,4$$

I.D - Étude des spirales d'Ekman du pôle Nord

Q35. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique.

Q36. Le référentiel géocentrique prend pour origine le centre de gravité de la Terre. Ses axes sont identiques à ceux du référentiel de Copernic.

Le référentiel géocentrique est en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic et ne peut être considéré comme galiléen que si la durée de l'expérience est très faible devant la période de révolution de la Terre autour du Soleil (1 an).

Q37. Le référentiel terrestre prend pour origine un point à la surface de la Terre. Ses axes sont fixes par rapport à la Terre.

Le référentiel terrestre est en rotation par rapport au référentiel géocentrique et ne peut être considéré comme galiléen que si la durée de l'expérience est très faible devant la période de révolution propre de la Terre (24 heures).

Q38. On considère un point matériel M se déplaçant avec le vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ dans un référentiel $(\mathcal{R})$ en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ autour d'un axe fixe (Oz) par rapport à un référentiel absolu $(\mathcal{R}_0)$.

L'accélération complémentaire a pour expression :

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$$

L'accélération d'entraînement a pour expression :

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

Q39. Les forces volumiques s'exerçant sur une particule de fluide de l'écoulement dans le référentiel terrestre non galiléen sont :

- * $\vec{f}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)$ résultante volumique des forces de pression
- * $\vec{p} = \mu_{\text{eau}} \vec{g} = -\mu_{\text{eau}} g_0 \vec{e}_z$ force volumique de pesanteur
- * $\vec{f}_v = \eta_{\text{eau}} \Delta \vec{v}$ résultante volumique des forces de viscosité
- * $\vec{f}_{ic} = -2\mu_{\text{eau}} \vec{\omega} \wedge \vec{v}$ force volumique de Coriolis

Q40. Avec la forme proposée pour le champ vectoriel des vitesses, le terme d'accélération convective s'écrit :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \vec{0}$$

Q41. On part de l'équation de Navier-Stokes en régime stationnaire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(P) &= \mu_{\text{eau}} \vec{g} + \vec{f}_{ic} + \eta_{\text{eau}} \Delta \vec{v} \\ \text{or : } \vec{f}_{ic} &= -2\mu_{\text{eau}} \vec{\omega} \wedge \vec{v} = -\frac{4\pi}{T_{\text{jour}}} \mu_{\text{eau}} \vec{u}_z \wedge (v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y) \\ \text{soit : } \overrightarrow{\text{grad}}(P) &= \mu_{\text{eau}} \vec{g} + \frac{4\pi}{T_{\text{jour}}} \mu_{\text{eau}} (v_y \vec{u}_x - v_x \vec{u}_y) + \eta_{\text{eau}} \Delta \vec{v} \end{aligned}$$

Q42. On projette l'équation précédente :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \eta_{\text{eau}} \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \frac{4\pi}{T_{\text{jour}}} \mu_{\text{eau}} v_y \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \eta_{\text{eau}} \frac{d^2 v_y}{dz^2} - \frac{4\pi}{T_{\text{jour}}} \mu_{\text{eau}} v_x \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\mu_{\text{eau}} g \end{cases}$$

L'intégration de l'équation projetée selon l'axe (Oz) conduit à :

$$P(x, y, z) = -\mu_{\text{eau}} gz + f(x, y)$$

$$P(x, y, z = 0) = P_0 (\forall x, \forall y) \rightarrow \boxed{P(z) = P_0 - \mu_{\text{eau}} gz}$$

Q43. D'après la question précédente, la pression ne dépend que de la variable z .

Les équations projetées selon les axes (Ox) et (Oy) se réécrivent donc :

$$\begin{cases} 0 = \eta_{\text{eau}} \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \frac{4\pi}{T_{\text{jour}}} \mu_{\text{eau}} v_y \\ 0 = \eta_{\text{eau}} \frac{d^2 v_y}{dz^2} - \frac{4\pi}{T_{\text{jour}}} \mu_{\text{eau}} v_x \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \frac{4\pi \mu_{\text{eau}}}{\eta_{\text{eau}} T_{\text{jour}}} v_y = 0 \\ \frac{d^2 v_y}{dz^2} - \frac{4\pi \mu_{\text{eau}}}{\eta_{\text{eau}} T_{\text{jour}}} v_x = 0 \end{cases}$$

On pose donc :

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{\eta_{\text{eau}} T_{\text{jour}}}{4\pi \mu_{\text{eau}}}}} = 8,3 \text{ cm}$$

Q44. On utilise une méthode de résolution complexe :

$$\tilde{V} = v_x + i v_y \rightarrow \boxed{\frac{d^2 \tilde{V}}{dz^2} - \frac{i}{\delta^2} \tilde{V} = 0}$$

Q45. La résolution de cette équation différentielle du second ordre conduit à :

$$\tilde{V}(z) = A \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}\delta} z\right) + B \exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}\delta} z\right)$$

On détermine les constantes d'intégration A et B à l'aide des conditions aux limites sur la vitesse :

$$\begin{cases} v(z=0) = v_0 \\ v(z \rightarrow -\infty) \neq \infty \end{cases} \rightarrow A = v_0 \text{ et } B = 0$$

Ainsi :

$$\tilde{V}(z) = v_0 \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}\delta} z\right)$$

$$\boxed{v_x(z) = v_0 \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right)} \text{ et } \boxed{v_y(z) = v_0 \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right)}$$

Q46. Par définition du débit massique :

$$D_x = \iint \mu_{\text{eau}} v_x(z) dy dz \text{ et } D_y = \iint \mu_{\text{eau}} v_y(z) dx dz$$

En considérant un rectangle de largeur unité selon les directions transverses (x et y), on a :

$$D_x = \mu_{\text{eau}} v_0 \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) dz \text{ et } D_y = \mu_{\text{eau}} v_0 \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) \sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right) dz$$

En posant le changement de variable :

$$u = -\frac{z}{\sqrt{2}\delta} \text{ soit } du = -\frac{dz}{\sqrt{2}\delta}$$

$$D_x = \sqrt{2}\delta \mu_{\text{eau}} v_0 \int_0^{+\infty} \exp(-u) \cos(u) du \text{ et } D_y = -\sqrt{2}\delta \mu_{\text{eau}} v_0 \int_0^{+\infty} \exp(-u) \sin(u) du$$

$$D_x = \sqrt{2}\delta \mu_{\text{eau}} v_0 \int_0^{+\infty} \exp(-u) \cos(u) du \text{ et } D_y = -\sqrt{2}\delta \mu_{\text{eau}} v_0 \int_0^{+\infty} \exp(-u) \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right) du$$

Avec l'intégrale fournie dans le formulaire de l'énoncé :

$$\boxed{D_x = \frac{\delta \mu_{\text{eau}} v_0}{\sqrt{2}} = -D_y}$$

Le fluide est donc transporté dans une direction moyenne faisant un angle $\theta = -45^\circ$ à droite par rapport à la direction de la vitesse en surface, ce qui est cohérent avec la remarque de l'énoncé : « *c'est principalement la force de Coriolis qui gouverne les courants en eaux profondes* », qui n'ont donc aucune raison d'être orienté par la direction du vent.

II. Étude d'écoulements tourbillonnaires au sein de la Terre

II.A - Structure interne de la Terre

- Q47.** Le principe fondamental de la statique des fluides s'écrit, pour une particule de fluide plongée dans un champ de pression P et soumise à une résultante des forces volumiques $\vec{f}$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \vec{f}$$

- Q48.** La répartition de masse au sein de la Terre est à symétrie sphérique, donc invariante par toute rotation de θ et φ . D'après le principe de Curie, la pression ne dépend donc que de la profondeur r .

- Q49.** D'après la **Figure 12** : $\mu_{\text{manteau}} = 4,5 \text{ à } 5,5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

- Q50.** On applique le **principe fondamental de la statique des fluides** à une particule de fluides au sein de la Terre située à une profondeur r dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \mu_{\text{manteau}} \vec{g}$$

En projetant cette équation selon l'axe radial :

$$\frac{dP}{dr} = -\mu_{\text{manteau}} g$$

$$\text{soit } \boxed{P(r) = P_0 + \mu_{\text{manteau}} g (R_T - r)}$$

À la base du manteau :

$$\boxed{P_M = P_0 + \mu g (R_T - R_M)} = 136 \text{ GPa}$$

Compte tenu des approximations faites (uniformité de la masse volumique dans le manteau et hypothèse d'équilibre mécanique), le résultat est satisfaisant au regard de la **Figure 11** (140 GPa).

- Q51.** Le **théorème de Gauss** stipule que le flux du champ électrique sortant à travers une surface fermée (Σ) est égal à la charge électrique Q_{int} contenue dans le volume délimité par la surface (Σ), appelée **surface de Gauss**, divisée par la permittivité diélectrique du vide.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

- Q52.** Les forces d'interaction gravitationnelle et électrostatique sont des **interactions newtoniennes** en $1/r^2$.

Une analogie formelle est alors possible, avec les équivalences suivantes :

Champ électrostatique : $\vec{E}(M)$	Champ gravitationnel : $\vec{g}(M)$
Sources du champ électrostatique : Charge q / Densité volumique de charge ρ $\boxed{dq(M) = \rho(M)dV}$ (charge élémentaire portée par un volume élémentaire dV centré en un point M de la distribution de charges de densité ρ)	Sources du champ gravitationnel : Masse m / Densité volumique de masse μ $\boxed{dm(M) = \mu(M)dV}$ (masse élémentaire portée par un volume élémentaire dV centré en un point M de la distribution de masses de densité μ)
Force d'interaction entre deux charges ponctuelles séparées d'une distance r : $\boxed{\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}}$	Force d'interaction entre deux masses ponctuelles séparées d'une distance r : $\boxed{\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -g \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}}$

Théorème de Gauss : $\oiint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ où Q_{int} est la charge contenue dans le volume délimité par la surface fermée Σ	Théorème de Gauss gravitationnel : $\oiint_{M \in \Sigma} \vec{g}(M) \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS = -4\pi G M_{\text{int}}$ où M_{int} est la masse contenue dans le volume délimité par la surface fermée Σ
---	--

Q53. Soit un point $M(r, \theta, \varphi)$ au sein de la Terre.

La distribution de masse au sein de la Terre est à symétrie sphérique, donc invariante par toute rotation de θ et φ . D'après le principe de Curie, les composantes du champ de gravitation ne dépendent donc que de la coordonnées r . Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétries de la distribution de masse et contiennent donc $\vec{g}(M)$. Ainsi :

$$\vec{g}(M) = g(r) \vec{u}_r$$

Q54. On applique le **théorème de Gauss gravitationnel** à une surface de Gauss sphérique de centre O et de rayon $r = OM$.

$$\begin{aligned} \oiint_{M \in \Sigma} \vec{g}(M) \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS &= -4\pi G M_{\text{int}} \\ g(r) \times 4\pi r^2 &= -4\pi G \times \frac{4}{3}\pi r^3 \mu \\ \text{soit : } \vec{g}(r) &= -\frac{4\pi G \mu}{3} r \vec{u}_r \end{aligned}$$

Q55. Avec les hypothèses de l'énoncé, on peut appliquer le **principe fondamental de la statique des fluides** à une particule de fer liquide du noyau :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \mu \vec{g}$$

En projetant selon la direction radiale et en prenant l'expression du champ de gravitation déterminée à la question précédente :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi G \mu^2}{3} r$$

On intègre :

$$P(r) = -\frac{2\pi \mu^2 G}{3} r^2 + K$$

On détermine la constante d'intégration K à partir de la condition aux limites :

$$P(r = R_M) = P_M \quad \rightarrow \quad P(r) = P_M + \frac{2\pi \mu^2 G}{3} (R_M^2 - r^2)$$

Q56. Le fer devient solide pour une pression de 320 GPa.

On doit donc avoir :

$$\begin{aligned} P_{\text{sol}}(T = 5000 \text{ K}) = 320 \text{ GPa} &= P_M + \frac{2\pi \mu^2 G}{3} (R_M^2 - R_G^2) \\ \text{soit : } R_G &= \sqrt{R_{\text{ext noyau}}^2 - \frac{3(P_{\text{sol}} - P_M)}{2\pi \mu_{\text{noyau}}^2 G}} = 1,2 \times 10^3 \text{ km} \end{aligned}$$

II.B - Étude de la convection thermique au sein du noyau terrestre

Q57. Lorsque la température augmente, la masse volumique du noyau liquide diminue.

La masse volumique du noyau liquide est donc une fonction croissante de la variable r .

Q58. La résultante du poids et de la poussée d'Archimède agissant sur la sphère a pour expression :

$$\vec{F} = \frac{4}{3}\pi a^3(\mu_{\text{fluide}} - \mu_{\text{sphère}})g\vec{u}_z$$

$$\text{soit : } \boxed{\vec{F} = \frac{4}{3}\pi a^3(\mu(T_{\text{fluide}}) - \mu(T_0))g\vec{u}_z}$$

$$T_{\text{fluide}} \geq T_0 \Rightarrow \mu(T_{\text{fluide}}) \leq \mu(T_0)$$

La résultante du poids et de la poussée d'Archimède est donc dirigée vers le bas, conduisant à un mouvement vertical descendant de la sphère jusqu'à la limite inférieure de la couche.

Q59. On applique la relation fondamentale de la dynamique à la sphère dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, en projection selon l'axe (Oz) :

$$\frac{4}{3}\pi a^3\mu(T_0)\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi a^3(\mu(T_{\text{fluide}}) - \mu(T_0))g - 6\pi\eta_0av$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta_0}{2a^2\mu(T_0)}v = \frac{\mu\left(T_0 + \frac{\Delta T}{2}\right) - \mu(T_0)}{\mu(T_0)}g} \quad (1)$$

Q60. La solution homogène de cette équation différentielle est une exponentielle décroissante, qui tends rapidement vers 0. La vitesse de la sphère tend rapidement vers une valeur limite :

$$v_{\text{lim}} = \frac{2a^2g}{9\eta_0}\left(\mu\left(T_0 + \frac{\Delta T}{2}\right) - \mu(T_0)\right)$$

$$\text{soit : } \boxed{v_{\text{lim}} = \frac{a^2g\Delta T}{9\eta_0}\mu'(T_0)}$$

Q61. La vitesse limite est atteinte au bout d'un temps égal à 5 fois le temps caractéristique de l'équation différentielle (1), soit :

$$\boxed{\tau = \frac{10a^2\mu(T_0)}{9\eta_0}}$$

Q62. En supposant la vitesse limite atteinte instantanément, le mouvement de la sphère est uniforme. Le temps nécessaire pour parcourir la couche d'étude vaut donc :

$$\Delta t_1 = \frac{h}{|v_{\text{lim}}|} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta t_1 = \frac{9h\eta_0}{a^2g\Delta T|\mu'(T_0)|}}$$

Lorsqu'elle atteint la partie inférieure de la couche d'étude, la sphère va tendre vers un équilibre thermique avec le fluide dans lequel elle est plongée.

Q63. Une sphère qui serait initialement située au niveau de la face inférieure de la couche d'étude subit une résultante du poids et de la poussée d'Archimède agissant dirigée vers le haut. Elle va donc monter dans la couche, les expressions de v_{lim} , τ et Δt_1 étant identiques au premier ordre.

Q64. Lorsque sa température est exactement égale à celle du fluide dans lequel elle est plongée, la masse volumique de la sphère est égale à celle du fluide dans lequel elle est plongée. La résultante du poids et de la poussée d'Archimède agissant sur la sphère est donc nulle et la sphère est immobile.

Q65. On considère un volume mésoscopique $\mathcal{V}$ de milieu, centré au point M et délimité par une surface fermée $\mathcal{S}$. Entre les instants t et $t + dt$, au cours d'une transformation parfaitement isochore ($\delta W = 0$), la variation d'énergie interne de ce système est égale au flux du vecteur densité de courant thermique entrant par la surface fermée $\mathcal{S}$, soit :

$$dU = - \oint_{\mathcal{S}} \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} d\mathcal{S} dt$$

où $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ d'après la loi de Fourier.

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, il vient :

$$dU = - \iiint_V \lambda \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)) dV dt$$

La variation d'énergie interne du système entre les instants t et $t + dt$ est quant à elle définie par :

$$dU = U(t + dt) - U(t)$$

$$\text{soit : } dU = \iiint_V \mu c \frac{\partial T}{\partial t} dt dV$$

On en déduit l'équation locale de conservation de la masse :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\mu c} \Delta T = 0}$$

Q66. En raisonnant par analyse dimensionnelle sur l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{T^*}{\Delta t_2} \sim D_{th} \frac{T^*}{a^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta t_2 = \frac{a^2}{D_{th}}}$$

Q67. La sphère peut atteindre la limite inférieure de la couche d'étude si :

$$\Delta t_1 \ll \Delta t_2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{9h\eta_0 D_{th}}{g\Delta T a^4 |\mu'(T_0)|} \ll 1}$$

Q68. La sphère étudiée passe alternativement par des phases de montée et de descente de durée Δt_1 , séparées par des phases de thermalisation avec l'extérieur lorsqu'elle se trouve en haut ou en bas de la couche, de durée Δt_2 .

Le modèle simple prévoit donc un mouvement périodique de période : $\boxed{T = 2 \times (\Delta t_1 + \Delta t_2) \approx 2\Delta t_2}$.

Q69. Le modèle simple permet de retrouver quelques caractéristiques conformes à l'analyse de Rayleigh :

- l'existence d'une température minimale à laquelle l'instabilité peut être observée ;
- l'existence d'une forme de périodicité.

Le modèle n'est cependant pas satisfaisant car les conditions d'instabilité du mouvement de la sphère dépendent de la taille de la sphère considérée, alors que celle-ci est un paramètre de la modélisation et pas du système lui-même. Le modèle devrait donc être raffiné en révisant certaines de ses hypothèses :

- le transfert thermique de l'extérieur de la sphère vers l'intérieur, s'il se produit, entraîne une variation de volume de celle-ci qui n'est pas prise en compte dans l'analyse dynamique ;
- l'hypothèse d'une vitesse de déplacement égale à la vitesse limite peut également être questionnée.

On peut enfin noter que la condition établie dans **Q67** exprimée à partir du nombre de Rayleigh, s'écrit :

$$\mathcal{Ra} = \frac{g\Delta T h^3}{\eta_0 D_{th}} |\mu'(T_0)| \gg 9 \frac{h^4}{a^4}$$

Cette condition en évidence le rôle de la dimension a choisie arbitrairement pour la sphère dans la condition d'instabilité. Le modèle simple étudié ne convient pas.