

Physique du sang

1 Modèles d'écoulements sanguins

1.1 Ecoulement d'un fluide newtonien dans un cylindre

1.1.1 Préliminaires

Q 1. En effectuant un bilan de masse sur un volume de contrôle V de fluide fixe délimité par la surface S pendant un temps dt , montrer que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\delta m = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau = - \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} dt \quad (\text{débit massique sortant du volume } V)$$

Soit d'après le théorème de Green Ostrogradski :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \iiint_V \text{div} \vec{j} d\tau$$

D'où

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

Q 2. Retrouver alors l'équation de la conservation de la masse, donnée par l'équation (2).

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0 \quad (2)$$

Donner la signification de la notation $\frac{D}{Dt}$.

Dans le cas d'un écoulement incompressible simplifier la relation (2). En déduire, en justifiant, une propriété vérifiée par le flux du champ de vitesses.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0$$

Soit

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0$$

- $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulaire.
- Dans le cas d'un écoulement incompressible, la masse volumique autour de la particule de fluide reste localement constante. On a donc $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, soit $\text{div} \vec{v} = 0$. Le champs de vitesse est à flux conservatif.

Q 3. Commenter l'hypothèse faite sur le champ de vitesse et montrer que v_z ne dépend que de r .

- En choisissant une vitesse portée par $\vec{u}_z$ on fait l'hypothèse d'un écoulement laminaire.
- D'après la symétrie cylindrique on a invariance par rotation autour de z , et v ne dépend pas de θ . De plus pour un écoulement incompressible $\text{div} \vec{v} = 0$ et v porté par $\vec{u}_z$ donc $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$. On a donc $\vec{v} = v(r) \vec{u}_z$.

Q 4. Exprimer la force de cisaillement exercée par le reste du fluide sur la particule de fluide (en considérant les surfaces en r et $r + dr$).

En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la particule de fluide, obtenir l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}}P + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma r)}{\partial r} \vec{u}_z \quad (3)$$

- Sur la particule de fluide, la résultante des forces des cisaillements est :

$$d\vec{F}_{\text{cisaillement}} = -\sigma(r) \times 2\pi r dz \vec{u}_z + \sigma(r + dr) \times 2\pi(r + dr) dz \vec{u}_z \approx +2\pi dr dz \frac{\partial(\sigma r)}{\partial r} \vec{u}_z$$

- On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule de fluide dans un référentiel supposé galiléen, en utilisant l'équivalent volumique des forces de pression :

$$\rho \times 2\pi r dr \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}}P \times 2\pi r dr dz + 2\pi dr dz \frac{\partial\sigma r}{\partial r} \vec{u}_z$$

Soit

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}}P + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma r}{\partial r} \vec{u}_z$$

1.1.2 Écoulement de Poiseuille dans l'hypothèse d'un fluide newtonien

Q 5. On rappelle l'expression du nombre de Reynolds $\mathcal{R}_E$ d'un écoulement cylindrique en fonction des grandeurs caractéristiques de l'écoulement, en prenant $2R$ comme longueur caractéristique et U comme vitesse caractéristique :

$$\mathcal{R}_E = \frac{2R\rho U}{\eta} \quad (4)$$

Préciser la signification physique du nombre de Reynolds. Dans le cadre d'un écoulement dans une conduite, préciser le type d'écoulement observé selon la valeur numérique du nombre de Reynolds, en ordre de grandeur.

$$\bullet \mathcal{R}_E = \frac{\text{ODG accélération convective}}{\text{ODG accélération diffusive}} = \frac{\rho v \cdot \frac{v}{2R}}{\eta \frac{1}{R} \frac{v}{R}} = \frac{2R\rho U}{\eta}$$

où U est la vitesse caractéristique de l'écoulement et en choisissant $2R$ pour longueur caractéristique de variation de la vitesse dans l'écoulement.

- Le nombre de Reynolds permet de caractériser la nature turbulente ou laminaire de l'écoulement. Typiquement, à partir d'une valeur de 2000 on peut considérer l'écoulement comme turbulent.

Q 6. Simplifier l'équation (3) en supposant l'écoulement stationnaire, laminaire, homogène et incompressible puis établir l'évolution de la pression en fonction de z , P_1 , $\Delta P = P_1 - P_2$ et L .

Montrer que la loi de vitesse $v_z(r)$ vérifie l'équation (5) :

$$v_z(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L}(r^2 - R^2) \quad (5)$$

- Stationnaire donc $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$; incompressible donc $\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}(\vec{v}) = v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ (car $\text{div}\vec{v} = 0$).
- D'où

$$\begin{aligned} -\frac{dP}{dz} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dP}{dz} &= K_1 = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) \end{aligned}$$

Avec les conditions aux limites :

$$P(z) = K_1 \cdot z + K_2 = \frac{P_2 - P_1}{L} \cdot z + P_1 = -\frac{\Delta P}{L} \cdot z + P_1$$

- On procède de même avec v_z :

$$r \frac{dv_z}{dr} = \frac{K_1 r^2}{2\eta} + K_3$$

$$v_z = \frac{K_1 r^2}{4\eta} + K_3 \ln r + K_4$$

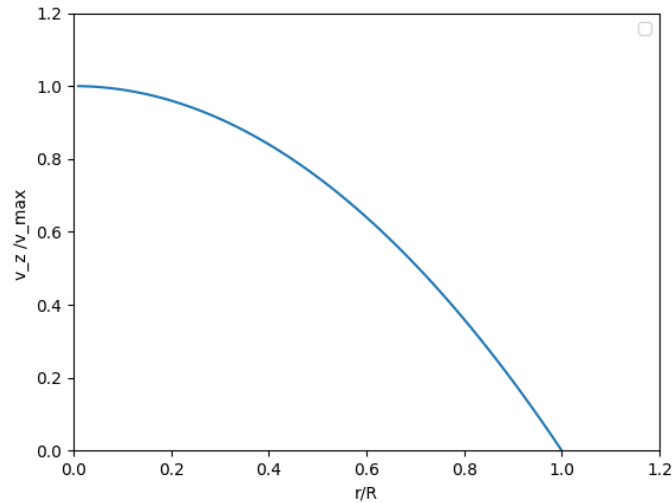
$K_3 = 0$ car v forcément bornée.

$$v_z(R) = 0 \text{ car fluide visqueux} \Rightarrow K_4 = -K_1 \frac{R^2}{4\eta}$$

D'où

$$v_z = -\frac{\Delta P}{4\eta L} (r^2 - R^2)$$

Q 7. Tracer le profil de vitesse $v_z(r)$.



Avec $v_{\max} = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2)$

Q 8. Définir le débit volumique Q_v transporté par le fluide. Montrer que ce débit vérifie la loi de Poiseuille donnée par l'équation (6) :

$$Q_v = \pi R^4 \frac{\Delta P}{8\eta L} \quad (6)$$

- Le débit volumique est défini par :

$$Q_v = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

- Donc

$$Q_v = -\frac{\Delta P}{4\eta L} \int_0^R (r^2 - R^2) 2\pi r dr = -\frac{\Delta P}{4\eta L} \times 2\pi \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^2 R^2}{2} \right]_0^R = \pi R^4 \frac{\Delta P}{8\eta L}$$

Q 9. Définir la résistance hydraulique R_h de la conduite en précisant son unité. Exprimer R_h en fonction de η , L et R .

Commenter la variation de la perte de charge (diminution de pression liée à l'écoulement) avec le rayon du cylindre en comparant avec l'analogie en électricité.

- La perte de charge ΔP est analogue à une tension, Q_v est analogue au courant. On a :

$$\Delta P = R_h \times Q_v \text{ avec } R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \text{ analogue à une résistance}$$

- R_h en Pa.s.m^{-3} soit en $\text{kg.m}^{-4}.\text{s}^{-1}$
- R_h varie fortement avec le rayon du cylindre (en R^4), plus la conduite est petite, plus la perte de charge est importante. En électricité $R_{\text{elec}} = \frac{\rho L}{R^2}$. La résistance hydraulique augmente donc beaucoup plus vite quand on diminue le rayon que la résistance en électricité. La raison provient des conditions aux limites ; la viscosité impose $\vec{v} = \vec{0}$ à la paroi, tandis qu'en électromagnétisme $\vec{j}$ ne s'annule pas à la surface d'un conducteur parfait, seule la composante normale s'annule.

1.1.3 Vérification expérimentale de la loi de Poiseuille

Q 10. Justifier que l'on peut négliger les pertes de charges dans les tuyaux de raccordement par rapport aux pertes de charge dans le capillaire.

Quelle pourrait-être l'origine des pertes de charges incontrôlées que le choix d'un grand rayon de courbure d'enroulement vise à limiter ?

Exprimer la différence de pression ΔP entre l'entrée et l'extrémité du capillaire enroulé en fonction des données, puis en déduire l'expression du débit volumique Q_v en fonction des données.

- $R_{\text{raccordement}} = 12R \gg R$ donc la résistance hydraulique des tuyaux de raccordement est beaucoup plus faible que pour celle du capillaire enroulé. Les pertes de charges des tuyaux de raccordement sont donc négligeables par rapport aux pertes de charge dans le capillaire.
- En augmentant le rayon de courbure, on limite les pertes singulières.
- D'après la loi de l'hydrostatique la pression en entrée du capillaire est $P_1 = \rho_{\text{eau}}gH + P_0$ (on néglige les pertes de charge dans les tuyaux de raccordement) et on a la pression atmosphérique P_0 en sortie du tuyau, donc $\Delta P = P_1 - P_2 = \rho_{\text{eau}}gH$.

$$\text{Soit } Q_v = \pi R^4 \frac{\rho_{\text{eau}}gH}{8\eta_{\text{eau}}L}$$

Q 11. Quel est le type d'évaluation d'incertitude (A ou B) choisi dans le programme Python de l'annexe 1 (lignes 20 à 25) pour les différentes grandeurs expérimentales ? Commenter les expressions d'incertitudes types choisies pour R , H et Q_v .

- Ce sont des évaluations de type B et pour Q_v une évaluation d'incertitude composée.
- Pour R , on a un écart de valeurs possibles données par le constructeur, on prend donc l'intervalle de valeurs de R possibles et on divise par 2, puis $\sqrt{3}$ en supposant une distribution rectangulaire des valeurs possibles dans l'intervalle. Pour H , la mesure est effectuée avec une règle graduée en cm, donc l'incertitude est donnée par une graduation divisée par $\sqrt{12}$. Pour Q_v , on effectue une propagation d'incertitude. On a

$$Q_v = V_0/t_0 \text{ donc } u(Q_v) = Q_v \sqrt{\left(\frac{u(t_0)}{t_0}\right)^2 + \left(\frac{u(V_0)}{V_0}\right)^2}$$

Q 12. Dans le programme, identifier la fonction permettant d'obtenir les paramètres de la modélisation de la relation Q_v en fonction de H par régression linéaire.

Discuter, en argumentant, la validité du modèle d'écoulement de Poiseuille.

Proposer une valeur de A et son incertitude.

- La fonction polyfit effectue une régression linéaire entre Q_v et H de la forme $Q_v = H \times A + O$.
- On constate que les points expérimentaux sont répartis aléatoirement de part et d'autre de la droite obtenue par la régression linéaire. De plus, l'écart entre la valeur mesurée et la valeur correspondante obtenue par la régression linéaire est inférieure à 2σ , σ étant la demie largeur de chaque barre d'erreur, donc les écarts à la droite de régression sont comparables aux incertitudes types. Le modèle linéaire $Q_v = A \times H$ est donc validé.

- On peut proposer $A = 1,551 \times 10^{-7} \text{m}^2.\text{s}^{-1}$ et $u(A) = 7,8 \times 10^{-9} \text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

Q 13. Expliquer sommairement l'objectif et la méthode, dite de Monte Carlo présentée de la ligne 45 à 53. Compléter la ligne 51.

Expliquer comment le programme calcule une valeur de $\eta_{\text{eau, expérimentale}}$ et son incertitude $u(\eta_{\text{eau, expérimentale}})$ et préciser les lignes des commandes correspondantes.

Proposer une valeur numérique pour ces deux grandeurs. Aurait-on pu les déduire de l'histogramme des valeurs possibles de η_{eau} potentielle et si oui comment ?

En comparant la valeur obtenue pour $\eta_{\text{eau, expérimentale}}$ avec la valeur de référence $\eta_{\text{eau, référence}}$ à 25°C , conclure sur la validité de l'expérience comme moyen expérimental de déterminer η_{eau} .

- La méthode de Monte Carlo permet de simuler un grand nombre d'expériences, ici $n_{\text{simulation}} = 10000$. On crée un tableau fictif de 10000 mesures aléatoires de chaque grandeur impliquée dans la détermination expérimentale de η_{eau} . On calcule ainsi 10000 fois la valeur expérimentale de η_{eau} .

- On complète la ligne : `A1=np.random.normal(A,u_A,n_simulation)`

- La valeur finale expérimentale de $\eta_{\text{eau, expérimentale}}$ est donnée par la valeur moyenne de tous les η_{eau} obtenus par la simulation de Monte Carlo, la commande est `np.mean(eta_eau)` ligne 80. L'incertitude type sur $\eta_{\text{eau, expérimentale}}$ est donné par l'écart type de la distribution des valeurs possibles de η_{eau} , la commande est `np.std(eta_eau)` ligne 81.

- En gardant 2 chiffres significatifs pour l'incertitude type, on obtient : $\eta_{\text{eau, expérimentale}} = 8,61.10^{-4} \text{Pl}$ et $u(\eta_{\text{eau}}) = 0,48.10^{-4} \text{Pl}$

- $\eta_{\text{eau, expérimentale}}$ correspond environ au maximum de la distribution des valeurs possibles de η_{eau} potentielle sur l'histogramme. La largeur à mi hauteur de la distribution des valeurs possibles de η_{eau} potentielle correspond à une estimation de $u(\eta_{\text{eau, expérimentale}})$.

- Afin de valider l'expérience comme moyen expérimental de mesurer η_{eau} on peut calculer l'écart normalisé, c'est à dire le Z-score :

$$\text{Z-score} = \frac{|\eta_{\text{eau, expérimentale}} - \eta_{\text{eau, référence}}|}{\sqrt{u^2(\eta_{\text{eau, expérimentale}}) + u^2(\eta_{\text{eau, référence}})}} = 0,62$$

Le Z-score étant inférieur à 2, la mesure de $\eta_{\text{eau, expérimentale}}$ par cette expérience est validée.

1.2 Hypothèse d'un écoulement newtonien du sang

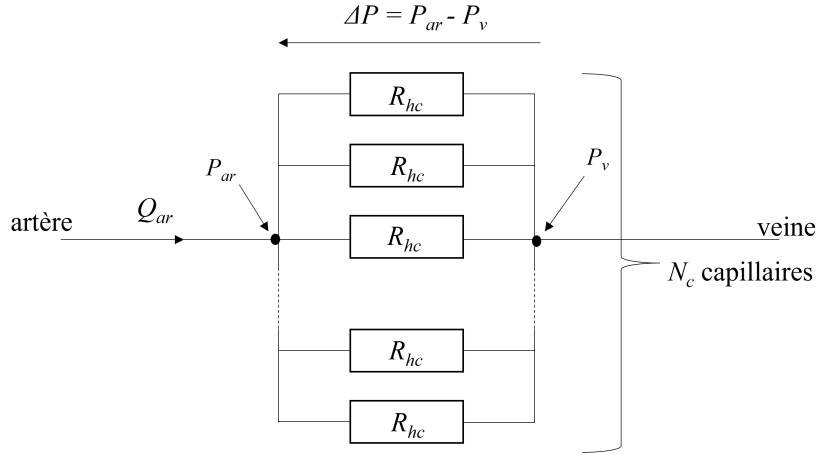
Q 14. Dessiner le schéma électrocinétique équivalent du système simplifié du lit vasculaire.

Déterminer l'expression de la résistance hydraulique d'un capillaire R_{hc} , de la résistance du réseau de capillaires R_h , et en déduire l'expression du nombre de capillaires N_c en fonction des données.

Déterminer également le débit volumique Q_c du sang dans les capillaires.

Effectuer les applications numériques. Commenter.

- Schéma électrique équivalent :



$$\bullet R_{hc} = \frac{8\eta l_c}{\pi R_c^4} \approx 2,0 \cdot 10^{17} \text{ Pa.s.m}^{-3}$$

• Les résistances étant toutes identiques et en parallèle, la résistance équivalente du lit vasculaire est $R_h = \frac{R_{hc}}{N_c}$

• Or d'après la loi de Poiseuille :

$$P_{ar} - P_v = R_h Q_{ar} \Rightarrow N_c = \frac{R_{hc} Q_{ar}}{P_{ar} - P_v} \approx 7,6 \times 10^7 \text{ capillaires}$$

$$\text{Et } R_h = \frac{2,0 \times 10^{17}}{7,6 \times 10^7} \approx 2,6 \times 10^9 \text{ Pa.s.m}^{-3}$$

• D'après la loi des noeuds $Q_c = \frac{Q_{ar}}{N_c} = \frac{5\% Q_{\text{coeur}}}{N_c} \approx 5,5 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

• On constate que du fait du très grands nombres de capillaires, la résistance hydraulique du lit vasculaire est considérablement diminuée. Pour que le cœur ne se fatigue pas, il faut une perte de charge la plus petite possible, donc le plus grands nombres de capillaires possibles.

Q 15. On définit la vitesse débitante U du sang comme celle qu'aurait un écoulement uniforme (donc non visqueux) de même débit. Calculer numériquement la vitesse débitante du sang, U_{ar} dans l'artère (ou la veine) et U_c dans les capillaires. Calculer également la vitesse débitante du sang directement en sortie du coeur U_{ao} .

En utilisant l'expression fournie du nombre de Reynolds, équation (4), calculer la valeur numérique des nombres de Reynolds $\mathcal{R}_{E_{ar}}$ de l'écoulement dans l'artère, $\mathcal{R}_{E_c}$ de l'écoulement dans un capillaire et $\mathcal{R}_{E_{ao}}$ de l'écoulement dans l'aorte, directement en sortie du coeur. Commenter.

$$U = \frac{Q_v}{\pi R^2}$$

$$U_{ar} = \frac{Q_{ar}}{\pi R_{ar}^2} \approx 21 \text{ cm.s}^{-1} \text{ et } \mathcal{R}_{E_{ar}} = \frac{2R_{ar}U_{ar}}{\eta} \approx 236$$

$$U_c = \frac{Q_c}{\pi R_c^2} \approx 0.69 \text{ mm.s}^{-1} \text{ et } \mathcal{R}_{E_c} = \frac{2R_cU_c}{\eta} \approx 1,5 \times 10^{-3}$$

$$U_{ao} = \frac{Q_{ao}}{\pi R_{ao}^2} \approx 41 \text{ cm.s}^{-1} \text{ et } \mathcal{R}_{E_{ao}} = \frac{2R_{ao}U_{ao}}{\eta} \approx 1470$$

D'après ces valeurs, l'écoulement du sang peut être considéré comme laminaire dans les petites artères et les capillaires, mais il peut potentiellement être turbulent dans l'aorte (typiquement pour un $\mathcal{R}_E$ de l'ordre de 2000 on peut avoir des transitions entre régime laminaire et turbulent.)

Q 16. On donne la pression moyenne dans l'aorte $P_{ao} = 12,9$ kPa et dans la veine cave $P_{vc} = 800$ Pa. Calculer numériquement la valeur de la résistance hydraulique R_{hcirc} correspondant à la circulation systémique.

On a

$$R_{hcirc} = \frac{P_{ao} - P_{vc}}{Q_{coeur}} \approx 1,55.10^8 \text{ Pa.s.m}^{-3}$$

1.3 Modèle du sang à écoulement périodique, effet Windkessel

Q 17. Exprimer le débit Q_{sys} sanguin du coeur pendant la systole en fonction du débit moyen du coeur Q_{coeur} , t_0 et T .

$$Q_{sys} = \frac{T}{t_0} Q_{coeur}$$

Q 18. Justifier sommairement la modélisation électrique de l'effet Windkessel donnée sur la figure ???. On précisera en particulier la grandeur électrique analogue à la compliance du système artériel et celle analogue au débit cardiaque.

- La résistance hydraulique représente le rôle résistif des artérioles et des capillaires. Le clapet est représenté par un interrupteur, clapet ouvert l'interrupteur est fermé.
- L'élasticité de la paroi artérielle est modélisé par une capacité C capable d'emmagasiner de l'énergie.
- Le débit volumique en provenance du coeur est vu comme un générateur de courant.

Q 19. On note $\Delta P(t) = P_a(t) - P_v$. On considère qu'à $t = 0$ le clapet s'ouvre (fermeture de l'interrupteur) et on pose Q_{circ1} le débit volumique au début de la systole dans le système circulatoire systémique. Donner l'équation différentielle vérifiée par Q_{circ} au cours de la systole et montrer que le débit à la fin de la systole vérifie :

$$Q_{circ}(t_0) = Q_{circ0} = Q_{sys} + (Q_{circ1} - Q_{sys}) e^{-\frac{t_0}{\tau}} \quad (7)$$

avec τ une constante à exprimer en fonction des données et dont on précisera l'unité.

- Conservation du débit :

$$Q_{sys} = Q_{circ} + \frac{dV}{dt}$$

Or $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dP_a} \times \frac{dP_a}{dt} = C \frac{d\Delta P}{dt}$ car P_v supposée constante.

d'où $Q_{sys} = Q_{circ} + R_{hcirc} C \frac{dQ_{circ}}{dt}$ en supposant la loi de Poiseuille vérifiée

D'où $\frac{dQ_{circ}}{dt} + \frac{1}{\tau} Q_{circ} = \frac{Q_{sys}}{\tau}$ avec $\tau = R_{hcirc} C$ homogène à un temps

Remarque : la loi des noeuds fonctionne aussi, et donne simplement :

$$Q_{sys} - Q_{circ} = C \frac{d\Delta P}{dt} = C \frac{d(R_{hcirc} Q_{circ})}{dt}$$

En résolvant l'équation différentielle du premier ordre à second membre constant, on obtient directement :

$$Q_{circ}(t) = Q_{sys} + (Q_{circ1} - Q_{sys}) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Donc

$$Q_{circ}(t_0) = Q_{sys} + (Q_{circ1} - Q_{sys}) e^{-\frac{t_0}{\tau}}$$

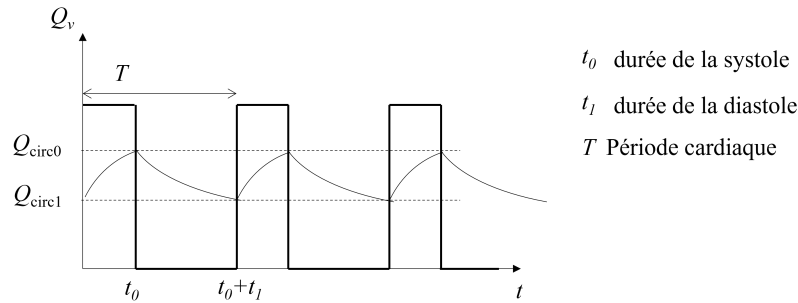
Q 20. Pour une fréquence cardiaque moyenne de 70 battements par minutes, une résistance hydraulique $R_{hcirc} = 1,5 \times 10^8 \text{ Pa.s.m}^{-3}$ et une compliance $C = 6 \text{ cm}^3.\text{kPa}^{-1}$, calculer numériquement t_0 , t_1 , τ ainsi que les valeurs extrêmes de Q_{circ} .

Dessiner l'évolution de Q_{circ} en fonction du temps. Conclure.

• Application numérique :

$$T = 0,86 \text{ s}, t_0 = 0,286 \text{ s et } t_1 = 0,571 \text{ s.}$$

$$Q_{sys} = 2,5.10^{-4} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}, \tau = 0,90 \text{ s}, Q_{circ0} = 1,1.10^{-4} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}, Q_{circ1} = 5,9.10^{-5} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}.$$



• Les deux débits extrêmes sont proches et le régime transitoire ($\approx 5\tau$) est plus long que T puisque $\tau \approx T$, par conséquent le débit en sortie de l'aorte est lissé ($\approx 8,3.10^{-5} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}$) du fait de l'élasticité de l'aorte et grosses artères, il ne s'annule jamais.

Q 21. En choisissant une pression de la veine $P_v = 800 \text{ Pa}$ (pression dans la veine cave), calculer numériquement les valeurs P_{a0} en fin de systole et P_{a1} en fin de diastole et comparer aux valeurs de pressions artérielles mesurées chez le médecin.

$P_{a0} = Q_{circ0} \times R_{hcirc} + P_v = 1,8.10^4 \text{ Pa} \approx 130 \text{ mmHg}$, $P_{a1} = Q_{circ1} \times R_{hcirc} + P_v = 9.7.10^3 \text{ Pa} \approx 72 \text{ mmHg}$ on retrouve les valeurs classiques mesurées pour une personne saine.

2 Mesure d'écoulement sanguin par effet Doppler

2.1 Propagation des ondes acoustiques dans le corps humain

Q 22. Linéariser l'équation de la conservation de la masse (2), l'équation d'Euler (équation (3) dans laquelle $\eta = 0$) et l'expression de χ_S en justifiant soigneusement les termes négligés.

Donner **sans la démontrer** l'équation de d'Alembert vérifiée par la surpression p et obtenir l'expression de la célérité c_s en fonction de χ_s et ρ par un raisonnement dimensionnel.

Pour une onde monochromatique, en ne gardant que les ordres les plus petits :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} \approx \frac{\mu}{T}$$

$$\mu_1 \text{div}(\vec{v}) \approx \rho \text{div}(\vec{v})$$

$$(\vec{v} \cdot \text{grad}) \mu_1 \approx \frac{v\mu}{\lambda} \text{ avec } \lambda = c_s T$$

$$|(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}| \approx \frac{v^2}{\lambda}$$

$$\bullet \frac{(\vec{v} \cdot \text{grad}) \mu_1}{\frac{\partial \mu_1}{\partial t}} \approx \frac{vT}{\lambda} \approx \frac{v}{c_s} \ll 1 \text{ dans l'approximation acoustique.}$$

$$\bullet \frac{|(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}|}{|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}|} \approx \frac{vT}{\lambda} \approx \frac{v}{c_s} \ll 1 \text{ dans l'approximation acoustique.}$$

D'où :

$$\bullet \text{ Conservation de la masse linéarisée : } \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\bullet \text{ Equation d'Euler linéarisée : } \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } p$$

$$\bullet \text{ Compressibilité isentropique linéarisée : } \chi_S = \frac{1}{\rho} \frac{\mu}{p}$$

• L'équation de d'Alembert est :

$$\Delta p - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

- Avec les unités χ_S est en $Pa^{-1} = kg^{-1}.m.s^2$ et ρ est en $kg.m^{-3}$. On trouve donc $c_s = \sqrt{\frac{1}{\rho\chi_S}}$

Q 23. On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant selon les x croissants. La surpression acoustique s'écrit, en notation complexe :

$$\underline{p}(x, t) = p_m e^{j(\omega t - kx)}$$

Obtenir la relation de dispersion reliant k à ω .

Exprimer la vitesse particulaire complexe $\underline{v}$ en fonction de $\underline{p}$.

On définit l'impédance acoustique dans le fluide par : $\underline{Z} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}}$. Exprimer $\underline{Z}$, puis $Z = |\underline{Z}|$ en fonction de ρ et χ_S .

- En remplaçant dans l'équation de d'Alembert :

$$\begin{aligned} -k^2 \underline{p} - \frac{1}{c_s^2} \times (-\omega^2) \underline{p} &= 0 \\ \Rightarrow k^2 &= \frac{\omega^2}{c_s^2} \end{aligned}$$

D'où la relation de dispersion :

$$k = \frac{\omega}{c_s}$$

- De l'équation d'Euler linéarisée on obtient $\rho j\omega \underline{v} = -(-jk)\underline{p}$, soit $\underline{v} = \frac{1}{\rho c_s} \underline{p}$
- D'où $\underline{Z} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}} = \rho c_s = \sqrt{\frac{\rho}{\chi_S}}$. $\underline{Z}$ est réel donc $Z = \sqrt{\frac{\rho}{\chi_S}}$ pour une onde progressive se dirigeant selon les x croissants.

Q 24. On définit le champ de vecteur $\vec{\Pi} = p\vec{v}$. Donner son nom et son unité.

L'intensité sonore I est définie par la relation $I = \langle ||\vec{\Pi}|| \rangle$, où $\langle \rangle$ représente l'opération de moyenne temporelle. Exprimer l'intensité sonore en fonction de p_m , ρ et c_s .

- $\vec{\Pi}$ est le vecteur densité de puissance de l'onde sonore en $W.m^{-2}$.

$$\bullet \quad I = \langle ||\vec{\Pi}|| \rangle = \langle pv \rangle = \left\langle \frac{p^2}{Z} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{p_m^2}{\rho c_s}$$

Q 25. Le passage d'une onde ultrasonore dans le corps humain induit des surpressions qui peuvent être dommageable pour les tissus. On considère que les effets biologiques néfastes apparaissent pour une onde d'intensité supérieure à 1 W/cm^2 . En déduire l'expression de la surpression maximale utilisable lors d'une échographie et effectuer l'application numérique en prenant une masse volumique pour les tissus biologiques $\rho \approx 10^3 \text{ kg/m}^3$. (En pratique en échographie Doppler standards on se limite à des intensités de 1 à 5 mW/cm².)

La surpression maximale autorisable en échographie est :

$$p_{max} = \sqrt{2I_{max}\rho c_s} = \sqrt{2 \times 1.10^4 \times 10^3 \times 1540} \approx 1,75.10^5 Pa \text{ soit } 1,75 \text{ atmosphère}$$

Remarque : en pratique on est très loin d'atteindre cette pression !

Q 26. Lors de leur propagation dans les tissus biologiques, les ultrasons subissent une atténuation de l'énergie acoustique, du fait de divers phénomènes dissipatifs. On peut montrer que l'intensité des ultrasons dans le corps humain suit une loi exponentielle de la forme : $I(x) = I_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$ où I_0 est l'intensité initiale de l'onde ultrasonore et δ est la longueur caractéristique de pénétration de l'onde ultrasonore. Pour les tissus mous, la longueur δ peut s'écrire : $\delta = \frac{\alpha}{f_0}$ avec f_0 en MHz et $\alpha \approx 2 \text{ cm.MHz}$.

Calculer l'atténuation en décibel de l'intensité sonore après 10 cm de tissus traversés à une fréquence de 3 MHz. Conclure.

- L'atténuation pour $x = 10$ cm vaut :

$$10 \log \frac{I_0}{I} = 10 \log e^{\frac{x}{\delta}} = 10 \times \frac{x}{\delta \ln 10} = 10 \times \frac{10 \times 3}{2 \ln 10} \approx 65 \text{ dB}$$

- L'atténuation est donc très importante pour 10 cm. Comme l'onde réfléchie sera également atténuée, il faut amplifier le signal capté par la sonde.

Q 27. Quel phénomène limite la résolution spatiale de l'échographie ? Estimer la longueur caractéristique ℓ de résolution en fonction de la fréquence f_0 et de la célérité c_s de l'onde ultrasonore.

Pour l'échographie Doppler et $f_0 = 3$ MHz, calculer numériquement ℓ .

- La résolution est limitée par le phénomène de diffraction. On ne pourra résoudre de détail plus petit que la longueur d'onde $\lambda = \frac{c_s}{f_0}$ des ultrasons.

$$\bullet \quad \ell = \frac{c_s}{f_0} = \frac{1540}{3.10^6} \approx 5,13.10^{-4} \text{ m} \approx 0,5 \text{ mm}$$

Avec une fréquence de 3 MHz, la résolution sera donc d'environ 0,5 mm.

Q 28. Expliquer simplement en utilisant les réponses aux deux questions précédentes en quoi le choix de la fréquence ultrasonore lors du doppler sanguin est essentiel (intensité du signal, profondeur de l'artère à explorer, résolution spatiale souhaitée).

- Pour explorer des vaisseaux profonds, il faut une grande longueur de pénétration, donc une petite fréquence f_0 .
- En contrepartie, l'énergie diffusée par les globules rouges sera moins importante, et la résolution moins bonne.
- Lors de l'exploration de vaisseaux superficiel, on peut augmenter la fréquence des ultrasons.
- Cela permet alors une meilleure résolution et un signal diffusé plus intense.

2.2 Principe de l'échographie Doppler

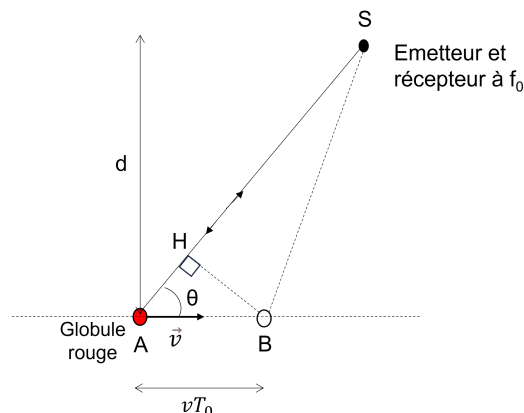
Q 29. On suppose qu'un globule rouge se mouvant à la vitesse v très inférieure à la vitesse des ultrasons c_s se déplace très peu pendant une période T_0 de l'onde ultrasonore par rapport à la distance d entre l'artère et la sonde. On appelle θ l'angle entre l'axe de l'artère et la direction de propagation de l'onde sonore (voir figure ??). On appelle f_0 la fréquence émise par la sonde et f'_0 la fréquence reçue par la sonde. En schématisant simplement la situation montrer que la fréquence Doppler f_D définie par $f_D = f'_0 - f_0$ vérifie l'équation (8) :

$$f_D = \frac{2f_0 v \cos \theta}{c_s} \quad (8)$$

Dans quel cas obtient-on concrètement une fréquence Doppler négative ?

Vérifier que pour un globule rouge se déplaçant dans l'aorte à environ 30 cm/s la fréquence Doppler appartient bien au domaine audible avec $f_0 = 3$ MHz.

- Supposons que la sonde émet des impulsions tous les $T_0 = \frac{1}{f_0}$:



A $t=0$, la sonde émet la première la première impulsion. Elle est reçue à $t_1 = \frac{SA}{c_s}$. La sonde reçoit l'impulsion réfléchie à $t_2 = 2t_1 = 2\frac{SA}{c_s}$. La sonde émet la deuxième impulsion à $t = T_0$. Le globule rouge s'est déplacé de $AB = vT_0$ entre les deux impulsions. il reçoit la deuxième impulsion à $t_3 = T_0 + \frac{SB}{c_s}$ et la sonde reçoit la deuxième impulsion réfléchie à $t_4 = T_0 + 2\frac{SB}{c_s}$.

Le temps écoulé entre les deux impulsions reçues par la sonde est

$$\begin{aligned} T'_0 &= t_4 - t_2 = T_0 + \frac{2}{c_s}(SB - SA) \\ SB &= \sqrt{(\vec{SA} + \vec{AB})^2} \\ &\approx \sqrt{SA^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{SA}} \\ &\approx \sqrt{SA^2 - 2vT_0 \cos \theta \times SA} \\ &\approx SA \left(1 - \frac{vT_0 \cos \theta}{SA}\right) \quad \text{DL à l'ordre 1} \end{aligned}$$

Soit

$$SB - SA = -vT_0 \cos \theta$$

Remarque, plus simplement, la distance d étant très grande devant vT_0 , $SB - SA \approx -AH \approx -vT_0 \cos \theta$.

D'où

$$T'_0 = T_0 \left(1 - \frac{2v \cos \theta}{c_s}\right)$$

Soit comme $v \ll c_s$

$$f'_0 = f_0 \left(1 + \frac{2v \cos \theta}{c_s}\right)$$

D'où

$$f_D = \frac{2vf_0 \cos \theta}{c_s}$$

- Si f_D est négative, cela signifie que l'angle θ est supérieur à 90° , c'est à dire que l'écoulement est en sens inverse.

- Pour $v = 30 \text{ cm/s}$ et $\theta = 0$ on obtient $f_D = \frac{2 \times 3.10^6 \times 30.10^{-2}}{1540} \approx 1170 \text{ Hz}$. $f_D \in [20 \text{ Hz} ; 20 \text{ kHz}]$ donc le signal doppler appartient bien à l'audible.

Remarque : Pour un angle θ de 0° la fréquence doppler mesurée sera maximale, on aura donc une grande précision dans la mesure des vitesses. En revanche, plus θ augmente plus la fréquence doppler mesurée diminue, jusqu'à s'annuler pour 90° . Il faut donc s'attacher au cours d'un examen doppler à avoir un angle θ le plus favorable possible pour avoir une évaluation exacte de la vitesse.

Q 30. Etablir la relation suivante liant l'incertitude relative sur la vitesse v à l'incertitude sur la mesure de l'angle

$$\frac{u(v)}{v} = u(\theta) |\tan \theta|$$

On considère que la marge d'erreur acceptable pour le calcul des vitesses en vélocimétrie doppler est de $\frac{u(v)}{v} \approx 15\%$. En supposant une incertitude sur la mesure de l'angle $u(\theta) = 10^\circ$, calculer l'angle maximale utilisable en échographie doppler. Conclure sur la facilité ou non de respecter la marge d'erreur acceptable.

- On a $v = \frac{f_D c_s}{2f_0 \cos \theta}$. En différenciant (on suppose f_0 parfaitement connue) on obtient :

$$dv = \frac{f_D c_s}{2f_0} \times \left(\frac{-\sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta} \right) = -v \times \tan \theta d\theta$$

D'où $\frac{u(v)}{v} = u(\theta) |\tan \theta|$

- On extrait $\theta_{max} = \arctan\left(\frac{15\%}{u(\theta)}\right) = \arctan\left(\frac{0,15 \times 180}{10 \times \pi}\right) \approx 40^\circ$.
- Pour remonter précisément la vitesse des globules rouges en vélocimétrie doppler, il est donc nécessaire de travailler avec des angles θ inférieurs à 40° , ce qui peut ne pas être toujours évident selon le vaisseau exploré et sa disposition dans le corps.

Q 31. Justifier la relation (9).

Expliquer simplement comment le choix de la position de la fenêtre d'écoute par rapport à l'émission permet de choisir la profondeur de la zone analysée. Justifier la nécessité d'une "courte" fenêtre d'écoute.

- Pour un vaisseau située à d_{max} le temps t_{max} mis par l'onde ultrasonore pour faire l'aller retour est $t_{max} = \frac{2d_{max}}{c_s}$. La deuxième impulsion doit être émise après t_{max} , c'est à dire après la réception de la première impulsion. D'où la relation (9).
- Pour un vaisseau sanguin situé à $d_1 < d_{max}$ le temps t_1 mis par l'onde ultrasonore pour faire l'aller retour est $t_1 = \frac{2d_1}{c_s}$. Il suffit de placer une fenêtre d'écoute qui débute à t_1 pour mesurer le signal réfléchi. Si la fenêtre d'écoute est trop grande, alors on récupère les signaux réfléchis par les vaisseaux plus profonds. Il faut donc que la fenêtre d'écoute soit courte.

Q 32. En considérant que le signal reçu par la sonde comporte les fréquences $f_0 + f_D$, $f_0 + PRF + f_D$ et $f_0 - PRF + f_D$ et en faisant l'hypothèse $f_D < PRF$, quelles sont les fréquences contenus dans le signal en sortie du multiplieur ? Comment choisir la fréquence de coupure du filtre passe-bas afin de récupérer le signal doppler utile ?

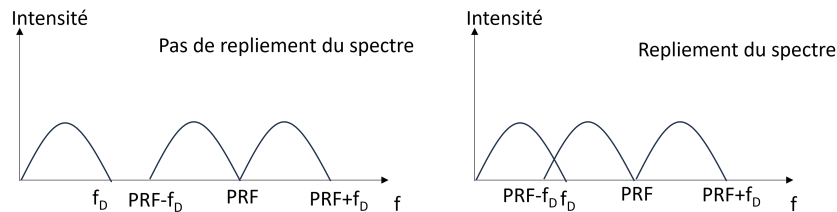
- Lors de la multiplication d'un signal de fréquence a par un signal de fréquence b on obtient des signaux de fréquence $a + b$ et $a - b$. Ici on multiplie un signal contenant les fréquences $f_0 + f_D$, $f_0 + PRF + f_D$ et $f_0 - PRF + f_D$ par un signal sinusoïdal à f_0 . En supposant $f_D < PRF$ on a donc en sortie du multiplieur les fréquences f_D , $2f_0 + f_D$, $PRF - f_D$, $PRF + f_D$, $2f_0 + PRF + f_D$ et $2f_0 - PRF + f_D$. Les deux dernières fréquences sont très importantes et facilement filtrées.
- Il faut donc choisir une fréquence de coupure f_c permettant de ne laisser passer que le signal utile à f_D , soit $f_c > f_D$ mais $f_c < PRF - f_D$.

Q 33. Dans la mesure où les globules rouges n'ont pas tous la même vitesse, le signal doppler a un spectre continu. Dessiner l'allure du spectre en sortie du multiplieur, en considérant f_D comme étant la fréquence doppler maximale mesurée.

Expliquer en quoi le choix de la PRF est déterminant pour éviter le phénomène de repliement du spectre (aliasing). On donnera le critère retenu et on précisera son nom.

Dessiner l'allure du spectre du signal doppler après le filtre.

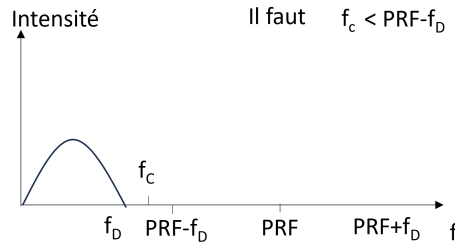
- Spectre en entrée du filtre, avec ou sans repliement spectral :



- Pour éviter le repliement spectral, il faut vérifier le critère de Shannon : $PRF > 2f_D$.

Remarque : Dans le cas d'un vaisseau profond, la PRF doit être plus petite car $PRF = \frac{c_s}{2d_{max}}$. Par conséquent si le flux est rapide, le critère de Shannon pourrait ne plus être vérifié durant la totalité du cycle cardiaque, entre autre on pourrait observer un repliement du spectre pendant la systole.

- On obtient en sortie du filtre le spectre suivant :



2.3 Analyse d'un doppler sanguin

Q 34. Quelle est la profondeur maximale qu'il est possible de sonder avec cette PRF ? Est-ce cohérent avec la profondeur de l'artère étudiée?

- La PRF choisie est de 3731 Hz. La profondeur d maximale qu'il est possible de sonder est :

$$d = \frac{c_s}{2PRF} \approx 20,6 \text{ cm}$$

- Ici l'artère rénale est située à 11,1 cm, donc elle peut bien être sondée.

Q 35. Déterminer, à partir du signal doppler $v(t)$ de la figure 13 et des données associées, la fréquence doppler correspondant aux globules rouges les plus rapides pendant la systole et pendant la diastole.

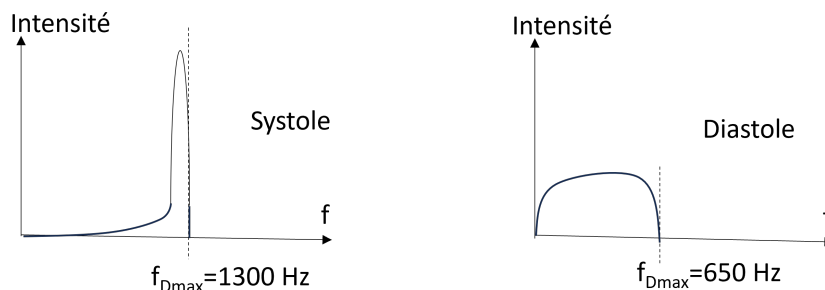
Vérifier que la PRF choisie permet d'éviter le repliement du spectre.

- Sur le sonogramme, on lit la vitesse maximale systolique : $v_{max} \approx 40 \text{ cm/s}$. Cette vitesse correspond à $f_{Dmax} = \frac{2f_0 v \cos \theta}{c_s} = \frac{2 \times 40 \cdot 10^{-2} \times 2,5 \cdot 10^6}{1540} \approx 1,3 \cdot 10^3 \text{ Hz}$. On procède de même pour la diastole, $v_{max} \approx 20 \text{ cm/s}$ soit $f_{Dmax} \approx 6,5 \cdot 10^2 \text{ Hz}$.

- Pendant la systole on a mesuré $f_{Dmax} \approx 1300 \text{ Hz}$. On a bien $PRF > 2f_{Dmax}$ et donc le critère de Shannon est vérifié.

Q 36. En vous aidant des explications de la figure 14 et en vous appuyant sur le signal doppler $v(t)$ de la figure 13 proposer un spectre en fréquence pendant systole et diastole, l'échelle des intensités pouvant être arbitraire.

- Pendant la systole l'écoulement est plat, tous les globules rouges vont à la même vitesse environ : on obtient un spectre très piqué.
- Pendant la diastole, l'écoulement est de type Poiseuille, les globules rouges sont répartis uniformément donc le spectre est très plat. D'où les spectres :



Q 37. Quelles sont les principales modifications observées pour une sténose de stade I?

Expliquer comment en analysant le sonogramme un médecin peut déterminer rapidement la réduction en surface du vaisseau. Comment pourrait-il repérer à l'oreille ce stade de sténose?

- D'après le spectre des vitesses, on observe une augmentation des vitesses systoliques et un aspect moins net du spectre, sans modification de la disposition des vitesses au sein du spectre.
- A partir de la mesure de la vitesse maximale systolique atteinte, le médecin peut déterminer la section de l'artère au niveau de la sténose en utilisant la conservation du débit :

$$v_{max} \times S_{artère\ saine} = v_{maxstenose} \times S_{artère\ sténosée}$$

- La fréquence doppler pendant la systole augmente en présence d'une sténose, le médecin peut donc la repérer à l'oreille car le son se déplace vers les aigus.

Q 38. Quelles sont les principales modifications observées pour une sténose de stade IV ?

Donner une explication possible pour les fréquences négatives observées.

Comment un médecin repère t'il à l'oreille ce stade de sténose ?

- Le spectre des vitesses est très modifié en cas de sténose de grade IV : on observe une faible proportion de globules rouges de vitesse élevée, la plupart étant ralentis au passage de la sténose.
- La présence de fréquences négatives traduit des turbulences : certains globules rouges repartent dans l'autre sens.
- A l'oreille, le son se décale vers les sons grave et devient plus anarchique du fait des turbulences.

3 Etude de la mécanique des globules rouges

3.1 Modèle simplifié d'un globule rouge

Q 39. Décrire une expérience mettant en jeu un phénomène associé à la tension superficielle. Proposer une définition du coefficient de tension superficielle et rappeler l'origine physique de ce coefficient.

- Expérience illustrant un phénomène associé à la tension superficielle : la loi de Jurin ou expérience de mouillage partiel et total ou instabilité de Rayleigh Plateau ou (schema fig.1)

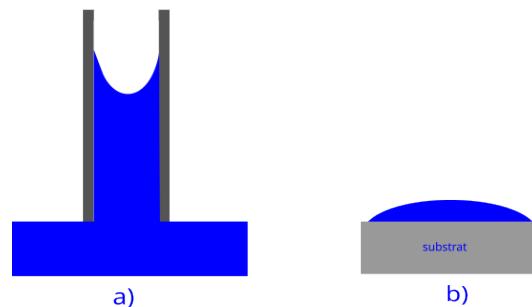


FIGURE 1 – a) Loi de Jurin (cas liquide mouillant). b) Mouillage d'un substrat.

- Thermodynamiquement, la tension superficielle entre deux phases est définie par $\gamma = \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{T,V}$ avec F l'énergie libre et A l'aire de contact entre les deux phases. (ou sinon la tension superficielle correspond à l'énergie nécessaire pour créer $1m^2$ d'interface.
- γ a pour origine les interactions attractives (interactions de van der Waals) entre les molécules et la brisure de symétrie à l'interface.

Q 40. Préciser l'unité et la dimension du coefficient de tension superficielle. Rappeler l'expression de l'énergie associée au phénomène de tension superficielle pour ce système.

- γ s'exprime en J/m^2 ou N/m . Dimension $[\gamma] = MT^{-2}$.
- Pour le système considéré, l'énergie de surface est donnée par :

$$E = \gamma \cdot 4\pi R^2$$

Q 41. A partir d'une transformation infinitésimale du rayon de la sphère, qui passe de R à $R + dR$, exprimer le travail des forces de pression et celui des forces de tension de surface. Montrer qu'il existe à l'équilibre une différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur. En déduire que pour un globule rouge modélisé par une sphère (figure ??a) de coefficient de tension superficielle γ_{GR} on a une différence de pression ΔP entre l'intérieur et l'extérieur : $\Delta P = \frac{2\gamma_{GR}}{R}$. Déterminer un ordre de grandeur de la différence de pression ΔP quand le globule rouge est sphérique au repos.

- On a la transformation suivante : (voir schéma fig 2 non demandé)

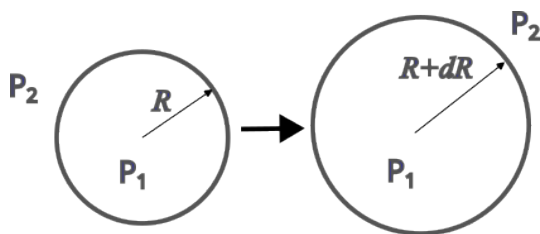


FIGURE 2 –

- $\delta W_{pression} = -(P_2 - P_1)dV = -(P_2 - P_1)4\pi R^2 dR$.
 $\delta W_{tension} = \gamma dA = \gamma \times 8\pi R dR$.
 A l'équilibre $\delta W_{pression} = \delta W_{tension}$, d'où :

$$P_1 - P_2 = \frac{2\gamma}{R}$$

(Loi de Laplace)

- Donc pour le globule rouge (GR), on a : $\Delta P = \frac{2\gamma_{GR}}{R}$ A.N : $\Delta P = 33 \text{ Pa}$.

Q 42. On considère maintenant que le globule rouge se déforme légèrement (à cause d'un écoulement ou d'une force appliquée) et prend une forme d'ellipsoïde de révolution allongée avec les demi-axes majeur M et mineur m (figure ??b). Quelle est la relation entre les déformations élémentaires dm et dM ? On rappelle que le volume d'une ellipsoïde de révolution (appelée prolata) est donné par $V = \frac{4}{3}\pi m^2 M$.

$$V = \frac{4}{3}\pi m^2 M$$

La conservation du volume implique $dV = 0 \Rightarrow 2mMdm + m^2dM = 0$
 d'où

$$\frac{dM}{M} = -2\frac{dm}{m}$$

Q 43. Pour de faibles déformations, on écrit $M = R(1 + \epsilon)$, et $m = R(1 - \epsilon')$ avec $\epsilon \ll 1$ et $\epsilon' \ll 1$. Quelle est la relation entre ϵ et ϵ' au premier ordre ? En déduire l'expression de m en fonction de ϵ . On admet que la force que l'on doit appliquer axialement pour provoquer une déformation statique de M , vaut au premier ordre en ϵ : $\|\vec{F}_\gamma\| \approx 3\pi\gamma_{GR}.R.\epsilon$. Expliquer pourquoi on peut considérer qu'un globule rouge est élastique pour de petites déformations. Calculer l'ordre de grandeur de la force à appliquer pour déformer un globule rouge d'environ $\frac{M-R}{R} = 10\%$ selon l'axe majeur.

- ϵ et ϵ' sont des infiniments petits.
Donc $dM = R\epsilon$ et $dm = -R\epsilon'$.
En utilisant Q42, au premier ordre (...), on a :

$$\epsilon = 2\epsilon'$$

. donc $m = R(1 - \epsilon/2)$

- $\vec{F}_\gamma \approx -3\pi\gamma R\epsilon.\vec{u} = -3\pi\gamma(M - R).\vec{u}$ avec un $-$ pour indiquer force de rappel et $\vec{u}$ un vecteur unitaire dans le sens de l'élongation.
($M - R$) est l'équivalent de Δx .
Donc la force de tension de surface est du type (loi de hooke) $\vec{F}_\gamma = -K\Delta x.\vec{u}$ avec une constante de raideur $K = 3\pi\gamma$ en N/m.
- A.N : $F_\gamma \approx 1,5 \times 10^{-10}$ N.

3.2 Pression de radiation : approche corpusculaire

Q 44. Rappeler l'expression de la quantité de mouvement d'un photon en fonction du vecteur d'onde k , puis en fonction de son énergie E , de l'indice du milieu n et de c la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. L'énergie d'un photon dépend-elle du milieu dans lequel il se propage ?

- $\vec{p} = \hbar\vec{k}$
- Or $k = n\frac{\omega}{c}$ donc $p = \frac{n.E}{c}$
- L'énergie d'un photon $E = h\nu$ est indépendante du milieu , avec ν la fréquence

Q 45. On considère un faisceau lumineux transportant N photons par unité de temps et de surface qui frappe l'interface **en incidence normale l'interface**. Déterminer la variation de quantité de mouvement par unité de temps, notée $\vec{dp}$ due à la réflexion et la transmission des photons frappant une surface élémentaire dS d'interface. Exprimer ce résultat en fonction des coefficients de réflexion R et de transmission T et des indices de réfraction. En déduire l'expression de la force $\vec{dF}$ exercée sur l'élément de surface $\vec{dS} = dS\vec{u}_z$ par le flux de photons sur l'interface dans le cas d'une incidence normale en fonction de N , E , c , des indices de réfraction et des coefficients R et T .

- $d^2p = (d^2p_t + d^2p_r - d^2p_i)$
Or $d^2p_i = +\frac{n_1.E}{c}.N.dS.dt.\vec{u}_z$
 $d^2p_t = \frac{n_2.E.T}{c}.N.dS.dt.\vec{u}_z$
 $d^2p_r = -\frac{n_1.E.R}{c}.N.dS.dt.\vec{u}_z$
d'où :

$$\vec{dp} = \frac{d^2p}{dt} = \frac{NdS.E}{c}.(n_2.T - (1 + R).n_1)\vec{u}_z$$

— Donc la force exercée par le flux de photons en incidence normale est $\vec{dF} = -\vec{dp}_{\text{interface/photon}}$. Donc

$$\vec{dF} = -\vec{dp} = \frac{NdSE}{c}.((1 + R).n_1 - n_2.T)\vec{u}_z$$

Q 46. Justifier qu'en incidence oblique θ_i (voir figure ??), la force totale de pression de radiation sur l'élément de surface dS est toujours selon la normale à l'interface.

- Montrons que la composante horizontale est nulle $dp_x = 0$.
On a $d\vec{p} = (d\vec{p}_t + d\vec{p}_r - d\vec{p}_i)$
- En incidence oblique, on a $d\vec{p}_i = \frac{n_1 \cdot E}{c} (\sin \theta_i \vec{u}_x + \cos \theta_i \vec{u}_z) \cdot N dS dt$
 $d\vec{p}_t = \frac{n_2 E \cdot T}{c} (\sin \theta_t \vec{u}_x + \cos \theta_t \vec{u}_z) \cdot N dS dt$
 $d\vec{p}_r = \frac{n_1 \cdot E \cdot R}{c} (\sin \theta_i \vec{u}_x - \cos \theta_i \vec{u}_z) \cdot N dS dt$
d'où :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{NdS \cdot E}{c} \cdot [(n_2 \cdot T \sin \theta_t - (1 - R) \cdot n_1 \sin \theta_i) \vec{u}_x + (n_2 \cdot T \cos \theta_t - (1 + R) \cdot n_1 \cos \theta_i) \vec{u}_z]$$

- On a :

$$dp_x = \frac{N \cdot dS \cdot E}{c} \cdot (n_2 \cdot T \sin \theta_t - (1 - R) \cdot n_1 \sin \theta_i)$$

Or $1 = T + R$ par conservation de l'énergie et par Snell-Descartes $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$, d'où :

$$dp_x = 0$$

- La force est donc normale à l'interface même en incidence oblique.

On définit la pression de radiation P_{rad} comme étant la force par unité de surface exercée par le flux de photons sur l'interface selon $+\vec{u}_z$. On montre alors que la pression de radiation exercée sur l'interface par le laser se propageant d'un milieu 1 vers le milieu 2 s'exprime par :

$$P_{\text{rad}} = \frac{n_1 I}{c} \cdot \cos^2 \theta_i \cdot \left[1 + R(\theta_i, \theta_t) - \frac{n_2 \cdot \cos \theta_t}{n_1 \cdot \cos \theta_i} T(\theta_i, \theta_t) \right] \quad (9)$$

Q 47. Vérifier que cette expression est compatible avec les résultats de la question 45. Dans quel sens la force de pression de radiation est-elle orientée dans le cas considéré ($n_1 > n_2$) ? Indiquer sur un schéma dans quel sens se déformerait l'interface.

- En incidence normale on a $\theta_i = \theta_t = \theta_r = 0^\circ$, donc cette expression devient :

$$P_{\text{rad}} = \frac{n_1 I}{c} \cdot \left[1 + R(\theta_i, \theta_t) - \frac{n_2}{n_1} T(\theta_i, \theta_t) \right]$$

En distribuant le facteur n_1 et en identifiant $I = N \cdot E$ (I est alors l'intensité), on retrouve l'expression de Q45 pour $P_{\text{rad}} = \left\| \frac{d\vec{F}}{dS} \right\|$.

- Pour $\theta_i = 0^\circ$, on a :

$$P_{\text{rad}} = \frac{2n_1 I}{c} \cdot \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)$$

- $P_{\text{rad}} > 0$ donc l'interface se déforme selon $+\vec{u}_z$ (voir schéma fig.3) vers le milieu d'indice le plus faible.

Q 48. Si les photons se propagent du milieu 2 vers le milieu 1, indiquer sur un schéma les différents rayons incident, réfléchi et transmis avec leurs angles respectifs. Quelle serait l'expression de la pression de radiation en incidence normale pour une propagation du milieu 2 vers le milieu 1 ? Indiquer sur un schéma dans quel sens est orientée la force de pression de radiation et dans quel sens se déformerait l'interface.

- Propagation à partir du milieu 2 ($n_2 < n_1$) : voir le schéma fig 4.

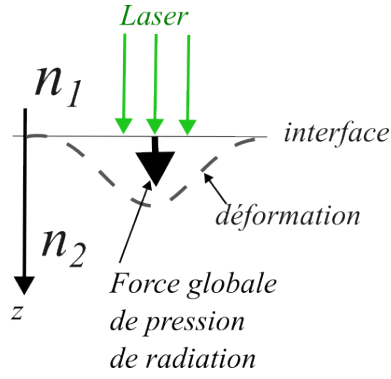


FIGURE 3 – Déformation dans le cas où le laser arrive par le milieu n_1 avec $n_2 < n_1$

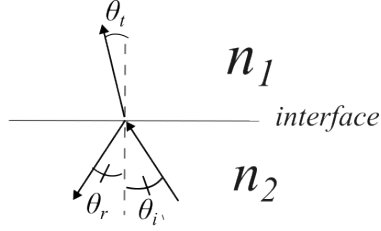


FIGURE 4 –

- Si les photons arrivent du milieu 2, en effectuant le même raisonnement depuis le début (voir Q45), on obtiendrait (...) :

$$P_{\text{rad}} = \frac{2n_2 I}{c} \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

(n_2 à la place de n_1 en préfacteur).

Donc la déformation a toujours lieu selon $+\vec{u}_z$ (voir schéma.fig 5), c'est à dire toujours vers le milieu d'indice le plus faible.

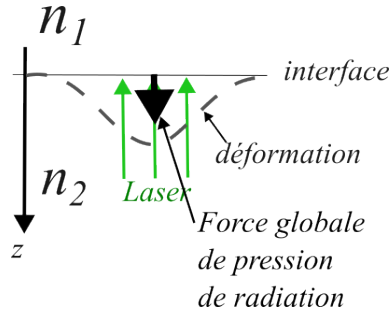


FIGURE 5 – Déformation dans le cas où le laser arrive par le milieu n_2 avec $n_2 < n_1$

On considère un faisceau laser cylindrique d'intensité uniforme I et se propageant du milieu d'indice n_1 vers le milieu d'indice n_2 , de puissance $\mathcal{P}$ et de demi-largeur de faisceau w_0 . On considère le cas où le laser est focalisé sur l'interface plane en $z = 0$ avec un angle d'incidence θ_i .

Q 49. Déterminer l'expression de la pression de radiation $P_{rad}(\theta_i)$ en fonction de la puissance $\mathcal{P}$, de la demi-largeur du faisceau laser w_0 et des indices (n_1 et n_2), de c et de θ_i uniquement.

- On a $\mathcal{P} = I\pi w_0^2$ donc :

$$P_{rad} = \left(\frac{2n_1\mathcal{P}}{\pi w_0^2 c} \right) \cdot \cos^2 \theta_i \left[1 + R(\theta_i, \theta_t) - \frac{n_2 \cdot \cos \theta_t}{n_1 \cdot \cos \theta_i} T(\theta_i, \theta_t) \right]$$

En remplaçant les expressions de $R(\theta_i, \theta_t)$ et $T(\theta_i, \theta_t)$ en fonction de θ_i et $\theta_t = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$, on obtient :

$$P_{rad} = \left(\frac{2n_1\mathcal{P}}{\pi w_0^2 c} \right) \cdot \cos^2 \theta_i \cdot \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}} \right)$$

Q 50. Sur la figure ??, on a tracé la pression de radiation P_{rad} en $z = 0$ en fonction de l'angle d'incidence pour différents contrastes d'indice $\delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ à n_1 fixé. Interpréter l'apparition d'un maximum dans les courbes de la figure ?. A quoi correspond l'angle noté θ^* pour lequel ce maximum est obtenu ? Comment varie la pression de radiation en fonction de θ_i pour $\theta_i > \theta^*$.

- L'expression de P_{rad} ci-dessus n'est valable que si $\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}$ existe. Donc pour $\theta_i \leq \theta_* = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ qui est l'angle de réflexion totale.
- Le maximum de la courbe apparait pour $\theta_i = \theta^*$
- Pour $\theta_i > \theta^*$, le coefficient de réflexion $R = 1$ et $T = 0$ donc :

$$P_{rad}(\theta_i > \theta^*) = \left(\frac{2n_1\mathcal{P}}{\pi w_0^2 c} \right) \cdot \cos^2 \theta_i$$

Q 51. Pour $\theta_i \rightarrow 0$, on montre que la pression de radiation pour un faisceau laser se propageant du milieu 1 vers le milieu 2 tend vers une valeur asymptotique à calculer en fonction de $\mathcal{P}$, w_0 , c , n_1 et n_2 . Faire une application numérique avec $\mathcal{P} = 500 \text{ mW}$, $w_0 = 10 \text{ }\mu\text{m}$, $n_1 = 1,38$ et $n_2 = 1,35$.

- Pour $\theta_i \rightarrow 0$, la pression de radiation tend vers une valeur constante :

$$P_{rad}(\theta_i \rightarrow 0) = (...) = \frac{2n_1\mathcal{P}}{c\pi w_0^2} \cdot \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)$$

- A.N. : $P_{rad} = 1,6 \times 10^{-1} \text{ Pa}$. (Rq : Les courbes de la figure 18 du sujet ont été effectuées avec d'autres conditions en puissance. Une lecture graphique n'est donc pas possible).

3.3 Déformation et rhéologie d'un globule rouge

Q 52. Représenter qualitativement la pression de radiation s'exerçant en chaque point de la surface sur l'interface avant et arrière. On pourra considérer différents cas. Représenter alors qualitativement la force totale due à la pression de radiation s'exerçant sur la face avant et sur la face arrière d'un globule rouge. Justifier à l'aide d'un schéma la forme prise par le globule rouge sur la figure ??b) lorsque celui-ci est éclairé par le laser.

- On est dans le cas $w_0 \leq R$ et les angles d'incidence vont de $[0; \pi/2]$. Donc il y a 2 cas à considérer :

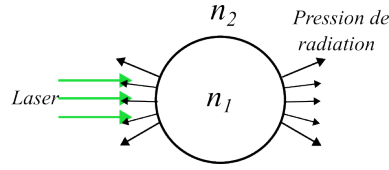


FIGURE 6 – Cas w_0 suffisamment petit

1. **Cas w_0 suffisamment petit** : soit w_0 trop petit ($w_0 \leq \frac{n_2}{n_1} \cdot R < R$ (condition non demandée)) et $\theta_i < \theta^*$ dans ce cas on obtient le schéma fig. 6 en se basant sur le graphique ?? (Pression de radiation presque constante) et en traçant en coordonnées polaires. (on néglige ici les phénomènes de réfraction au sein de l'objet pour le tracé qualitatif). Les flèches indiquent la contrainte locale et on a presque la même taille.
2. **Cas w_0 suffisamment grand** : soit w_0 est suffisamment grand ($R > w_0 > \frac{n_2}{n_1} \cdot R$ (condition non demandée)) et on peut avoir $\theta_i > \theta^*$ dans ce cas on obtient le schéma fig. 7 suivant avec la présence d'un maximum de pression de radiation. La pression de radiation est maximale pour $\theta_i = \theta^*$. Avec les valeurs d'indices $\theta^* \approx 78$ deg. Sur la face arrière, on passe de n_2 à n_1 il n'y a pas de phénomène de réflexion totale : donc il n'y a pas de pic de pression de radiation.

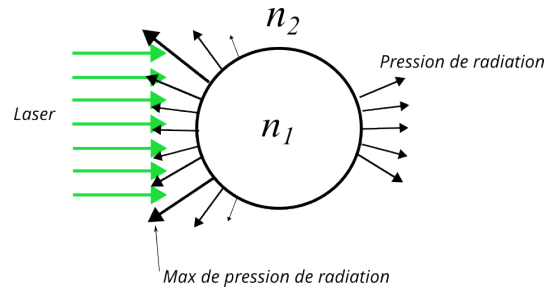


FIGURE 7 – Cas w_0 suffisamment grand.

- Comme vu en Q47 et Q48, la force de pression de radiation s'exerce toujours vers le milieu d'indice de plus faible, d'où le schéma fig. 8. De plus, par symétrie les contributions hors axe z se compensent. Donc la force globale sur la face avant ou arrière est selon l'axe du laser. (Remarque (non demandé) : avec les indices donnés, on peut montrer que la force sur la face arrière est plus importante que sur la face avant).

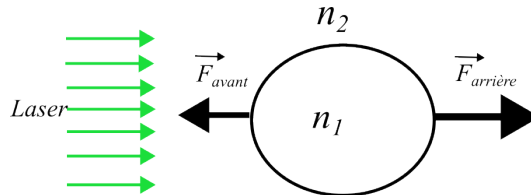


FIGURE 8 –

- Le schéma est cohérent avec l'élongation du globule rouge présenté sur la figure. La pression de radiation étire vers l'extérieur selon l'axe z , ce qui entraîne une déformation ellipsoïdale.

Q 53. En considérant, en première approximation, que le faisceau laser est suffisamment mince pour avoir $\theta_i \ll 1$ pour tout le faisceau laser, calculer la force totale sur l'interface avant du globule rouge (figure ??a). En déduire, de même une expression de la force sur l'interface arrière.

- Sur la face avant , on passe du milieu 2 vers le milieu $n_{GR} = n_1$ donc avec l'approximation $\theta_i \ll 1$, on a

$$\vec{F}_{av} = -\frac{2n_2 I \cdot \pi w_0^2}{c} \cdot \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right) \vec{u}_z$$

- Sur la face arrière , on passe du milieu 1 vers le milieu 2, avec une intensité lumineuse transmise $I \cdot T$ donc avec l'approximation $\theta_i \ll 1$, on a

$$\vec{F}_{ar} = +\frac{2n_1 \cdot I \cdot \pi w_0^2 T}{c} \cdot \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right) \vec{u}_z$$

Q 54. En utilisant les résultats de la partie 3.1, donner la relation qui relie notamment la tension superficielle du globule rouge γ_{GR} , la déformation $\epsilon = \frac{M-R}{R}$ et l'intensité du faisceau laser I , permettant ainsi de déterminer des propriétés mécaniques du globule rouge par laser.

- Chaque interface est étirée et donc on a :

$$\frac{2n_1 I \cdot T \cdot \pi w_0^2}{c} \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} - \left[-\frac{2n_2 I \pi w_0^2}{c} \cdot \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right) \right] = F_\gamma \approx 3\pi\gamma_{GR}R\epsilon$$

soit

$$\frac{2I\pi w_0^2}{c} \cdot \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right) \cdot (n_1 \cdot T + n_2) = 3\pi\gamma_{GR}R\epsilon$$

Q 55. A partir des questions 53 et 54, calculer la force totale qui s'exerce sur le globule rouge. Expliquer alors pourquoi il est préférable d'utiliser deux faisceaux lasers afin d'avoir une position fixe pour le globule rouge. Proposer à l'aide d'un schéma une configuration utilisant deux faisceaux lasers.

- La force totale s'exerçant sur le globule rouge est :

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{av} + \vec{F}_{ar} = \frac{2I \cdot \pi w_0^2}{c} \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \cdot (n_1 \cdot T - n_2) \vec{u}_z$$

. Avec les valeurs de n_1 et n_2 , on a $T = 0,9998$ et $(n_1 \cdot T - n_2) = 0,029 > 0$ donc le globule rouge est poussé vers $+\vec{u}_z$. Le globule rouge n'a donc pas une position stable avec un seul faisceau.

- Pour éviter ce déplacement, on peut utiliser deux faisceaux lasers contra-propageants. (Schema fig.9)

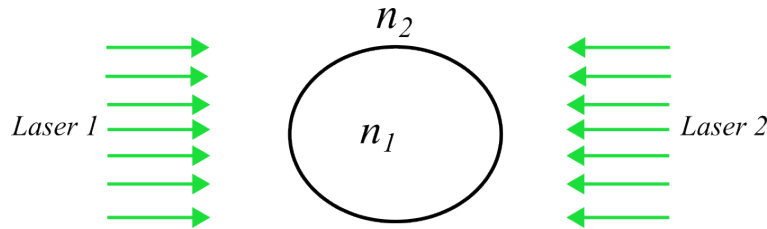


FIGURE 9 –