

Conversion d'énergie solaire

Éléments de correction

I. LES ONDES D'ALFVÉN

I.1. Équations de base

1. La masse de fluide dans le volume $\mathcal{V}$ s'écrit : $M = \iiint_{\mathcal{V}} \rho dV$. La variation temporelle de cette masse entre deux instants voisins s'écrit à l'aide du flux sortant à travers la surface $\mathcal{S}$ du vecteur densité de courant de masse :

$$M(t + dt) - M(t) = - \oint_{\mathcal{S}} \rho \vec{u} \cdot \vec{dS} dt$$

$$\frac{dM}{dt} = - \oint_{\mathcal{S}} \rho \vec{u} \cdot \vec{dS}$$

On applique la formule de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\rho \vec{u}) dV$$

Ceci est vrai pour tout volume $\mathcal{V}$, donc la fonction $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u})$ est uniformément nulle, ce qui établit le résultat demandé.

2. En remplaçant dans l'équation précédente, on a : $\text{div}(\rho_0 \vec{u}) + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$. Or $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ par hypothèse, donc $\rho_0 \text{div}(\vec{u}) = 0$. Ainsi, $\text{div}(\vec{u}) = 0$, donc $\vec{u}$ est à flux conservatif.

3. Le membre de gauche de cette égalité est le produit d'une masse volumique et d'une accélération. Les deux termes d'accélération correspondent à la dérivée particulaire (ou la dérivée lagrangienne) de la vitesse :

- $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ est la dérivée locale du champ des vitesses ;
- $(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{u}$ est l'accélération convective.

Les termes de droite correspondent à des forces volumiques :

- $-\overrightarrow{\text{grad}}(p)$ est l'équivalent volumique des forces de pression ;
- $\vec{j} \wedge \vec{B}$ représente la force volumique de Lorentz ;
- $\eta \Delta \vec{u}$ représente l'équivalent volumique des forces de viscosité.

4. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS), on néglige le terme de courants de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Il reste alors :

$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$
--	---	-----------------------------------	--

Changement de référentiel non relativiste du champ électromagnétique.

5. Selon les principes de la relativité galiléenne, les lois de Newton sont telles que la mesure d'une force doit être invariante d'un référentiel galiléen à un autre. La force de Lorentz est donc invariante.

Soit une particule chargée q possédant une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel (R) et $\vec{v}'$ dans le référentiel (R').

Dans le référentiel (R), la force de Lorentz qui s'applique à cette particule s'exprime :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}),$$

dans le référentiel (R'), la force de Lorentz qui s'applique à cette particule s'exprime :

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}').$$

La loi de composition des vitesses donne : $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$ et donc : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} + \vec{v}' \wedge \vec{B})$.

Or $\vec{F} = \vec{F}'$, donc on peut écrire : $\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} + \vec{v}' \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'$.

Par identification on a donc : $\vec{B} = \vec{B}'$ et $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}$.

6. On considère une surface élémentaire dS , fixe dans le référentiel (R), de vecteur unitaire normal $\vec{n}$, et on compte le nombre d'électrons libres, animés d'une vitesse $\vec{v}_\ominus$, qui la traversent pendant dt . Dans le référentiel (R), ces électrons sont ceux qui se trouvent dans le cylindre de hauteur $\vec{v} \cdot \vec{n} dt$ et de surface dS . En notant n^* la densité volumique d'électrons, on associe donc à leur mouvement le vecteur $\vec{j} = -en^* \vec{v}_\ominus$, dont le flux élémentaire à travers dS est égal au courant élémentaire dI .

Dans le référentiel (R'), il faut compter le courant d'électrons, qui se déplacent à la vitesse $\vec{v}_\ominus + \vec{u}$, et de toutes les autres charges i , de densités n_i^* , qui étaient fixes dans (R), et se déplacent désormais à $\vec{u}$. Finalement :

$$\vec{j}' = -en^*(\vec{v}_\ominus + \vec{u}) + \sum_{\substack{\text{charges } i \text{ fixes} \\ \text{dans (R)}}} q_i n_i^* \vec{u}$$

$$\vec{j}' = -en^* \vec{v}_\ominus + \left(\sum_{\substack{\text{charges } i \text{ fixes} \\ \text{et mobiles dans (R)}}} q_i n_i^* \right) \vec{u}$$

Le second terme est nul car le conducteur est globalement neutre. Ce qui établit le résultat.

Si on se place dans le référentiel (R') lié au conducteur la loi d'Ohm locale s'écrit : $\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$.

En utilisant les résultats précédents, l'expressions de passage entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{E}'$ donne immédiatement la loi d'Ohm dans le référentiel (R) : $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$.

I.2. Équation d'induction

7. On compose la loi d'Ohm par le rotationnel pour un conducteur animé d'une vitesse $\vec{u}$:

$$\text{rot}(\vec{j}) = \sigma(\text{rot}(\vec{E}) + \text{rot}(\vec{u} \wedge \vec{B})),$$

Puis, à nouveau, on applique le rotationnel : $\text{rot}(\text{rot}\vec{B}) = \mu_0\sigma \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{u} \wedge \vec{B}) \right)$

$$-\Delta \vec{B} = \frac{1}{\eta_m} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{u} \wedge \vec{B}) \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{u} \wedge \vec{B}) + \eta_m \Delta \vec{B}}$$

8. Dans le cas où $\vec{u} = 0$, on obtient une équation de diffusion. Les transferts thermiques par diffusion sont un exemple de processus physique régi par une équation analogue.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \eta_m \Delta \vec{B} = \vec{0},$$

$$i\omega f - \eta_m \frac{d^2 f}{dz^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{i\omega}{\eta_m} f = 0,$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \alpha^2 f = 0.$$

En passant en notation exponentielle : $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$, on peut écrire $\alpha^2 = e^{\frac{i\pi}{2}} \frac{\omega}{\eta_m}$, donc $\alpha = e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega}{\eta_m}}$ qui devient $\alpha = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega}{2\eta_m}}$.

9. Les solutions de f sont de la forme : $f = A_1 e^{\alpha z} + A_2 e^{-\alpha z}$

En injectant cette solution dans l'équation précédente on fait apparaître une longueur caractéristique, appelée l'épaisseur de peau : $\delta = \sqrt{\frac{2\eta_m}{\omega}}$.

Le champ magnétique se propage donc selon : $\vec{B} = \vec{B}_0 \left(A_1 e^{\frac{z}{\delta} + i(\omega t + \frac{z}{\delta})} + A_2 e^{-\frac{z}{\delta} + i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \right)$. Le conducteur est dans le demi-plan $z \geq 0$, et le champ $\vec{B}$ doit garder une norme finie, donc $A_1 = 0$ et il reste : $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\frac{z}{\delta} + i(\omega t - \frac{z}{\delta})}$. L'onde est atténuée, en raison du terme $e^{-\frac{z}{\delta}}$, sur une longueur δ qui augmente si la pulsation ω et si la conductivité σ diminuent ($\eta_m = \frac{1}{\sigma\mu_0}$). Le cas limite $\sigma \rightarrow \infty$ est cohérent avec le modèle du conducteur parfait.

10. Ce sont des termes convectifs.

- $(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{B}$ représente le transport du champ magnétique par l'écoulement.
- $(\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{u}$ représente le transport des lignes de courant par le champ magnétique.

L'équation faisant apparaître la dérivée particulaire (lagrangienne) $\frac{D\vec{B}}{Dt}$, du champ magnétique est :

$$\frac{D\vec{B}}{Dt} = (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{u} + \eta_m \Delta \vec{B}$$

Remarque : Cette équation correspond à la description « lagrangienne » qui consiste à suivre dans le temps les particules fluides le long de leurs trajectoires.

I.3. Équation de la quantité de mouvement et paramètres sans dimension

11. On remplace : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ dans l'équation de la quantité de mouvement :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) \wedge \vec{B} + \eta \Delta \vec{u}$$

En utilisant le formulaire il vient directement :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{u} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} p - \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \eta \Delta \vec{u} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{B}. \quad (5)$$

Dans cette équation, le terme $-\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)$ est un terme correspondant à l'équivalent volumique d'une pression magnétique, directement lié à la densité volumique d'énergie magnétique.

12. En remplaçant par les valeurs caractéristiques de la couronne solaire, on obtient :

$$R_e \equiv \frac{\rho_0 L U_0}{\eta} \equiv \frac{\text{terme inertiel}}{\text{terme de diffusion visqueuse}} \approx 10^{12}$$

$$R_m \equiv \frac{L U_0}{\eta_m} \equiv \frac{\text{terme de convection de l'équation d'induction}}{\text{terme de diffusion magnétique de l'équation d'induction}} \approx 10^7$$

$$M_A = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0 U_0^2} \equiv \frac{\text{énergie magnétique}}{\text{énergie cinétique}} = \frac{1}{\beta} \approx 10^5$$

Il s'agit d'un écoulement turbulent car $R_e \gg 1$ et $R_m \gg 1$. Il est contrôlé par le champ magnétique car $M_A \gg 1$. Finalement, on peut négliger les termes de diffusion visqueuse et de diffusion magnétique.

13. Les équations (4) et (5) dimensionnées en négligeant les termes qui peuvent l'être deviennent :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{B},$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{B} = (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{u}.$$

14. En introduisant la décomposition donnée dans l'équation de la quantité de mouvement, on obtient :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{2\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}}(B_0^2 + 2\vec{B}_0 \cdot \vec{b} + b^2) + \frac{1}{\mu_0} \left((\vec{B}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}_0 + (\vec{B}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}_0 + (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{b} \right),$$

Cette équation devient en négligeant les termes d'ordre 2 :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{B}_0 \cdot \vec{b}) + \frac{1}{\mu_0} \left((\vec{B}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{b} \right),$$

La perturbation magnétique étant perpendiculaire au champ $\vec{B}_0$ et $\vec{B}_0$ étant selon $\vec{e}_z$, on obtient :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} B_0 \frac{\partial \vec{b}}{\partial z}}$$

En injectant la décomposition des champs dans l'équation d'induction et négligeant les termes d'ordre 2, on obtient :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\vec{B}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}.$$

De la même manière, $\vec{B}_0$ étant selon $\vec{e}_z$, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}}$$

15. En dérivant les équations précédentes par rapport au temps pour le champ magnétique et par rapport à z pour la quantité de mouvement, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} &= B_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \vec{v}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_0 \mu_0} B_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{b}. \end{aligned}$$

En remplaçant la dérivée croisée de la vitesse, on établit l'équation de propagation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} - \frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial z^2} = \vec{0}}$$

Cette équation fait apparaître la vitesse caractéristique pour ces ondes : $V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}}$.

$$\frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial z^2} = 0$$

$$\boxed{V_A \approx 3 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

16. On remplace la forme de solution $\vec{b} = \vec{b}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ dans l'équation de propagation :

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0} k_z^2 &= 0 \\ -\omega^2 + \frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0} k^2 \cos^2 \theta &= 0 \\ \omega &= \pm \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}} k \cos \theta \\ \boxed{\omega = \pm V_A k \cos \theta} \end{aligned}$$

17. La vitesse de phase représente la vitesse de la phase d'une onde, i.e. de la déformation ou de la perturbation magnétique. C'est la célérité de propagation d'une composante monochromatique.

La vitesse de groupe s'interprète comme vitesse de l'enveloppe du paquet d'onde ; elle représente la vitesse de l'énergie.

$$\begin{aligned} v_\phi &= \frac{\omega}{k} = \pm V_A \cos \theta \\ \vec{v}_g &= \vec{\text{grad}}_k \omega = \pm \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \vec{e}_z \\ v_g &= \pm V_A \end{aligned}$$

La vitesse de phase dépend de la direction du vecteur d'onde alors que l'énergie se propage selon $\vec{e}_z$. Dans ce cas, on n'observe pas de la dispersion des ondes d'Alfvén.

18. Les ondes transversales ont leurs vecteurs d'onde perpendiculaires à la direction de la déformation du milieu.

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{b}) &= \text{div}(\vec{b}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}), \\ \text{div}(\vec{b}) &= (-ik_x b_{0x} - ik_y b_{0y} - ik_z b_{0z}) e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \\ \text{div}(\vec{b}) &= -i\vec{k} \cdot \vec{b} = 0, \\ \vec{k} &\perp \vec{b}. \end{aligned}$$

On peut citer comme exemples les ondes de surface à la surface d'un liquide ou d'un solide (transversales), les ondes sonores dans un fluide ou un solide (longitudinales). Les ondes sismiques peuvent être des deux natures : ondes P, dites de compression (longitudinales) ; ondes S, dites de cisaillement (transversales).

19. On injecte cette forme de solution $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial}{\partial z} \vec{v}, \\ i\omega \vec{b} &= -B_0 i k_z \vec{v}, \\ \frac{\omega}{k_z} \vec{b} &= -B_0 \vec{v}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0} b^2 &= B_0^2 v^2, \\ \frac{b^2}{2\mu_0} &= \frac{1}{2} \rho_0 v^2, \\ \mathcal{E}_{mag} &= \mathcal{E}_{cin}\end{aligned}$$

Il y a égalité de densités volumiques d'énergie magnétique et cinétique dans les ondes d'Alfvén.

20. On reprend l'équation de propagation avec le terme diffusif.

$$\frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} - \frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \eta_m \Delta \vec{b} = 0$$

La relation de dispersion est donc :

$$\begin{aligned}-\omega^2 \vec{b}_0 + V_A^2 k_z^2 \vec{b}_0 - i\eta_m \omega (-ik)^2 \vec{b}_0 &= 0 \\ \omega^2 - i\eta_m \omega k^2 - V_A^2 k_z^2 &= 0\end{aligned}$$

Le terme supplémentaire est un terme d'amortissement (diffusion du champ magnétique).

Calculons le discriminant du trinôme en ω associé à la relation de dispersion :

$$\Delta = -\eta_m^2 k^4 + 4V_A^2 k_z^2$$

On a un premier cas : $\eta_m^2 k^4 < 4V_A^2 k_z^2$

$$\omega = \frac{1}{2} (i\eta_m k^2 \pm \sqrt{\Delta})$$

On observe une forme de solution correspondant à des oscillations amorties (régime pseudo-périodique) traduisant une propagation du champ magnétique qui s'atténue au cours du temps.

$$\vec{b} = \vec{b}_0 e^{-\frac{1}{2}\eta_m k^2 t} e^{i\left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} t - k_x x - k_y y - k_z z\right)}$$

Le second cas à étudier correspond à l'inégalité contraire : $\eta_m^2 k^4 > 4V_A^2 k_z^2$

$$\omega = \frac{1}{2} i \left(\eta_m k^2 \pm \sqrt{|\Delta|} \right)$$

La forme de la solution correspond à amortissement aperiodique par rapport au temps ; dans cette configuration il n'y a plus de couplage entre la dépendance temporelle et la dépendance spatiale du champ magnétique.

$$\vec{b} = \vec{b}_0 e^{-\frac{1}{2}(\eta_m k^2 \pm \sqrt{|\Delta|}) t} e^{i(-k_x x - k_y y - k_z z)}$$

Fin de la partie I.

II. PUISSANCE RAYONNÉE PAR LE SOLEIL

II.1. Chauffage dans l'atmosphère solaire

21. Le vecteur de Poynting s'écrit par définition : $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B})$. Il exprime la densité de flux d'énergie de l'onde (une puissance surfacique). Sa norme s'exprime en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

22. Grâce à l'approximation de la MHD idéale, on peut négliger la densité de courant dans la couronne. Donc $\vec{j} = \vec{0} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{\Pi} &= -\frac{1}{\mu_0} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \\ \mu_0 \vec{\Pi} &= -(\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{v} \\ \mu_0 \vec{\Pi} &= -(v_z B_0 + v_\perp b_\perp) \vec{B} + (B_0^2 + b_\perp^2) \vec{v} \\ \boxed{\mu_0 \Pi_z} &= \boxed{-v_\perp b_\perp B_0 + b_\perp^2 v_z}\end{aligned}$$

23. L'incompressibilité fournit : $\text{div}(\vec{v}) = 0$, on peut donc écrire $\vec{k} \cdot \vec{v} = 0$, donc $v_z = 0$. On peut aussi utiliser le fait que les ondes d'Alfvén sont des ondes transversales. Donc :

$$\mu_0 \Pi_z = -(v_\perp b_\perp) B_0$$

En utilisant le résultat de la question 19 on a $b_\perp = \sqrt{\rho_0 \mu_0} v_\perp$ donc :

$$\begin{aligned}\mu_0 \Pi_z &= \sqrt{\rho_0 \mu_0} v_\perp^2 B_z \\ V_A &= \frac{B_z}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}} \\ \boxed{\Pi_z} &= \boxed{\rho_0 v_\perp^2 V_A}\end{aligned}$$

24. En utilisant les ordres de grandeur fournis par l'énoncé on obtient :

$$\begin{aligned}\Pi_z &\approx 10^{-9} \times (10^3)^2 \times 10^{-2} \times (10^{-9} \times 4\pi \times 10^{-7})^{-0.5} \\ \Pi_z &\approx \boxed{3 \times 10^2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}}.\end{aligned}$$

L'ordre de grandeur est cohérent, cependant il correspond au flux d'énergie transportée pas de celle dissipée dans la couronne. Il faut donc déterminer si la dissipation est suffisante pour garantir le chauffage de la couronne par les ondes d'Alfvén. Cependant il y a un problème car en MHD idéale il n'y a pas de mécanisme d'amortissement (pas de diffusion du champ). Il faut donc enrichir le modèle.

II.2. Energie solaire reçue à la surface de la Terre

25. On a $(1 - x_{abs}) \times \left(\frac{T_S}{T_\ell}\right)^4 = 29$. On en déduit donc $\boxed{T_S = T_\ell \times \left(\frac{29}{1 - x_{abs}}\right)^{\frac{1}{4}}}$.

Il faut penser à exprimer T_ℓ en K. On prend comme valeur numérique la moyenne de l'intervalle proposé par Soret. $T_\ell \approx 2223$ K. On obtient alors $T_S \approx 5709$ K. L'incertitude étant principalement liée à T_ℓ , connue à 2,3% près, on peut en déduire $\Delta T_S \approx 1,3 \times 10^2$ K.

Finalement, on écrit : $\boxed{T_S = (5,71 \pm 0,13) \times 10^3 \text{ K}}$.

Remarque : Sur l'écriture finale, on peut aussi choisir une loi rectangulaire pour obtenir une incertitude-type et écrire le résultat final : $T_s = (5709 \pm 74) \times 10^3 \text{ K}$. Cela correspond aux préconisations des nouveaux programmes de CPGE. Dans ce cas le symbole $\pm$ introduit une incertitude-type.

26. On observerait un spectre dont la forme ressemble au spectre AM0, mais comportant des minima locaux correspondant à des raies d'absorption de certaines longueurs d'onde du rayonnement solaire par des molécules qui composent l'atmosphère. De plus, l'atmosphère absorbe une partie des ultraviolets, on observerait donc un spectre atténué par rapport au spectre AM0, et ce d'autant plus pour les longueurs d'onde inférieures à 400 nm.

27. La méthode des moindres carrés a pour but de trouver les paramètres d'une fonction qui minimisent la somme des carrés des écarts entre cette fonction et des points expérimentaux. En physique, les paramètres ainsi obtenus constituent l'estimation des valeurs numériques des grandeurs qui interviennent dans le modèle décrit par la fonction considérée.

28. On trouve approximativement $\lambda_{\max} \approx 0,5 \text{ }\mu\text{m}$, ce qui donnerait $T = 5798 \text{ K}$. La figure ne permettant pas une précision de lecture meilleure que $0,02 \text{ }\mu\text{m}$ (soit 4% de la valeur), on peut affirmer que l'ordre de grandeur obtenu est cohérent avec la valeur trouvée par la fonction `curve_fit`.

29. En supposant que la détermination par la fonction `curve_fit` est beaucoup plus précise que celle de la méthode de Soret, et en notant $u(T)$ l'incertitude-type de la méthode de Soret ($u(T) = \frac{\Delta T}{\sqrt{3}} = 74 \text{ K}$), on a un écart normalisé (Z-score) égal à : $\frac{5761-5709}{74} \approx 0,7 < 2$. La valeur obtenue par la méthode de Soret est compatible avec la valeur obtenue en exploitant le spectre AM0 du rayonnement solaire.

30. La puissance $\mathcal{P}_S$ rayonnée par le Soleil s'obtient en écrivant : $\mathcal{P}_S = \sigma T_S^4 \times 4\pi R_S^2$. On obtient ensuite la constante solaire F en écrivant $F = \frac{\mathcal{P}_S}{4\pi D^2}$, donc finalement :

$$F = \sigma_S T_S^4 \times \left(\frac{R_S}{D}\right)^2$$

On a donc $F = 1,31 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$.

La surface de la Terre est égale à $4\pi R_T^2$ c'est-à-dire 4 fois la surface du disque équatorial. Donc le flux moyen en un point de la surface de la Terre est égal à $\frac{F}{4} = 328 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.

Remarque : Ces valeurs sont un peu plus faibles que celles admises aujourd'hui car on est reparti de la température un peu sous-estimée par Soret.

31. En un an l'énergie reçue est égale à $3,8 \times 10^{24} \text{ J}$. Cela donne $1,06 \times 10^9 \text{ TWh}$. L'énergie primaire totale consommée par l'humanité est 7000 fois plus faible que l'énergie rayonnée par le Soleil à la surface de la Terre.

Fin de la partie II.

III. ÉTUDE D'UNE INSTALLATION PHOTOVOLTAÏQUE

III.1. Schéma électrique équivalent d'une cellule photovoltaïque

32. La loi des nœuds donne $I = I_{ph} - I_d$, donc :

$$I = I_{ph} - I_s \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right)$$

33. L'intensité de court-circuit est obtenue pour $V = 0$; on a donc $I_{cc} = I_{ph}$.

La tension à vide est obtenue pour $I = 0$. On a alors $V_{co} = V_T \ln \left(1 + \frac{I_{ph}}{I_s} \right)$.

On obtient numériquement : $I_{cc} = 40 \text{ mA}$ et $V_{co} = 0,61 \text{ V}$, ce qui est conforme à la figure 4.

34. La puissance électrique P est égale à $V \times I$. Dans le plan (V, I) les courbes $P = c^{te}$ correspondent aux hyperboles d'équation $I = \frac{P}{V}$. Ces hyperboles ont deux, un ou zéro point d'intersection avec la caractéristique, et la puissance maximale est obtenue pour l'hyperbole ayant exactement un point d'intersection. Qualitativement, elle se trouve donc « dans le coude » de la caractéristique.

Cela donne environ $I_0 = 37 \text{ mA}$ et $V_0 = 0,56 \text{ V}$ c'est-à-dire $P \approx 21 \text{ mW}$.

On obtient ce point de la caractéristique en branchant une résistance $R_0 = \frac{V_0}{I_0} = 15 \Omega$ aux bornes de la cellule.

35. Les conditions d'éclairement sont identiques à celles de la question précédente : $P_L = 100 \text{ mW}$. En supposant que la charge est telle que la puissance électrique délivrée par chaque cellule est maximale, on doit associer en série 71 cellules pour obtenir une tension de 40 V et 203 associations (de 66 cellules) en parallèle pour obtenir une intensité de 7,5 A correspondant à une puissance totale de 300 W. Il faut donc associer environ 14×10^3 cellules au total.

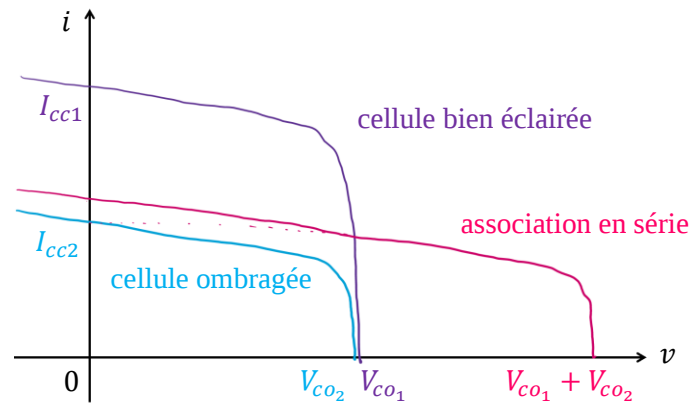
Remarque : on retrouve bien que 14×10^3 cellules de 21 mW unitaires fournissent environ 300 W.

36. Cela correspond à une surface de $1,4 \text{ m}^2$. Pour une installation de 2,4 kW il faut donc installer 11 m² de cellules environ.

On peut définir le rendement r de l'installation photovoltaïque comme le rapport de la puissance électrique récupérée et de la puissance solaire incidente sur l'installation. On a donc $r = \frac{P}{P_L} \approx 21\%$ (ou $r = \frac{300}{1400} = 21\%$ si l'on raisonne numériquement sur l'ensemble des cellules).

Ce rendement est très éloigné de l'unité parce qu'une partie du rayonnement solaire correspond à des photons trop peu énergétiques pour obtenir l'effet photovoltaïque (énergie permettant à un électron de passer dans la bande de conduction). Les photons trop énergétiques, eux, permettent d'arracher un électron mais le surplus d'énergie est perdu.

37. Des cellules associées en série sont parcourues par la même intensité. On peut donc déduire la caractéristique en sommant à intensité donnée les tensions des deux cellules. On obtient l'allure suivante :



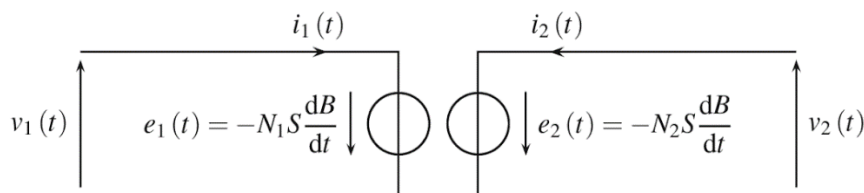
On s'aperçoit donc qu'on ne peut pas dépasser l'intensité produite par la cellule la plus ombragée, ce qui n'est pas satisfaisant.

III.2. Transformateur élévateur

38. La valeur efficace d'une tension périodique est la valeur de la tension continue qui dissiperait dans une résistance donnée la même puissance moyenne. Ainsi $V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt}$. Pour une tension sinusoïdale, on a $V_{eff} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$. Numériquement, $V_1 = 21 \text{ V}$.

39. Dans le cadre du modèle du transformateur parfait, le matériau ferromagnétique canalise parfaitement le flux. Donc le flux est identique à travers toutes les spires du primaire et du secondaire.

On a le schéma équivalent suivant, d'après la loi de Faraday, en négligeant les résistances :



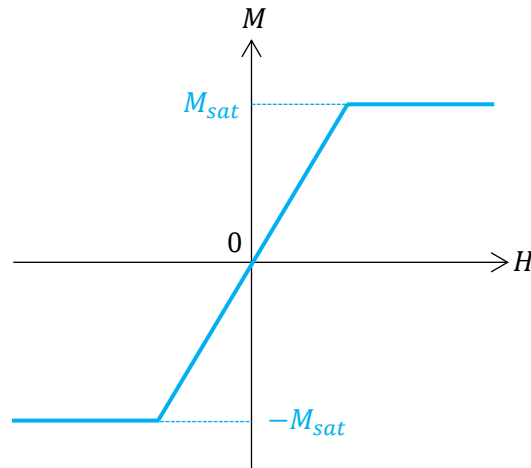
On a donc $\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$ et donc $\boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}}$.

40. On a donc $\boxed{m = \frac{230\sqrt{2}}{30} \approx 11}$.

41. $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

On a donc dans l'ARQS $\overrightarrow{\text{rot}}(B) = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{M}) + \mu_0 \overrightarrow{j_{libres}}$ et donc $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(H) = \overrightarrow{j_{libres}}}$.

42.

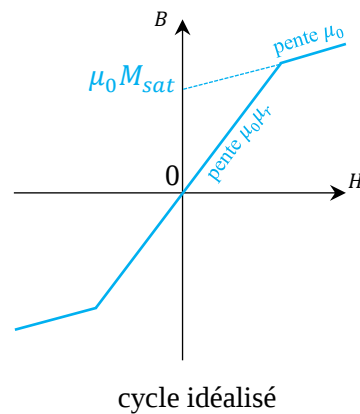
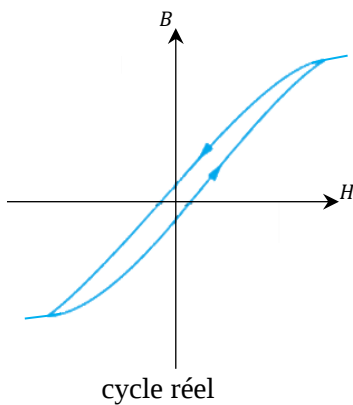


Dans la partie linéaire, on a $\vec{M} = \chi \vec{H}$.

43. Un matériau ferromagnétique doux possède un cycle d'hystérésis étroit. Celui-ci possède donc des propriétés plus proches du modèle du matériau linéaire. Un tel matériau possède une susceptibilité magnétique de l'ordre de 10^3 ou 10^4 . Pour un matériau paramagnétique on a plutôt $\chi \approx 10^{-6}$ à 10^{-3} . Pour un matériau diamagnétique la susceptibilité magnétique est négative, de l'ordre de -10^{-5} .

44. Donc $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}$. On pose $\mu_r = 1 + \chi$ et $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$.

45.



46. Le matériau ferromagnétique atteint la saturation si l'amplitude B_{max} de $\|\vec{B}\|$ dépasse B_{sat} . Le cas limite correspond donc à $B_{max} = B_{sat}$.

La loi de Faraday appliquée à l'enroulement primaire donne $v_2 = -N_2 \frac{d\varphi}{dt}$. Donc, en amplitude, en régime harmonique : cela donne : $V_2\sqrt{2} = N_2 B_{max} S \times 2\pi f$ (formule de Boucherot).

Ainsi, pour éviter de dépasser B_{max} alors que f , N_2 et V_2 sont fixés, on ne peut que jouer sur S et choisir $S \geq S_{min}$ avec $S_{min} = \frac{V_2\sqrt{2}}{2\pi f B_{max} N_2}$

L'application numérique donne : $S_{min} = 2,88 \times 10^{-3} \text{ m}^2$.

Le tore est à section circulaire donc cela correspond à un rayon de la section de 3,0 cm ce qui semble plausible dans cette gamme de puissance.

47. On applique le théorème d'Ampère. $N_1 i_1 + N_2 i_2 = H\ell$ et $H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$ avec $B = \frac{\varphi}{S}$, d'où la relation d'Hopkinson.

Pour un transformateur parfait, on a $\mu_r \gg 1$, donc $N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$.

48. Dans le cadre du transformateur parfait, les deux enroulements étant en convention générateur (figure 7), on a $\frac{v_2}{v_1} = -\frac{i_1}{i_2} = m$, on a donc $v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0$. Donc le rendement du transformateur est unitaire.

49. Le rayon des spires est égal à $\sqrt{\frac{S_{min}}{\pi}}$, cette grandeur est notée a dans l'énoncé.

Les pertes dans les enroulements, les longueurs respectives $L_1 = N_1 \times 2\pi a$ et $L_2 = N_2 \times 2\pi a$, sont égales à

$$\mathcal{P}_{cuivre} = \frac{1}{\sigma_{Cu}} \left[\frac{L_1}{S_1} m^2 I_2^2 + \frac{L_2}{S_2} I_2^2 \right]$$

On a de plus $L_1 = \frac{L_2}{m}$ donc il reste

$$\mathcal{P}_{cuivre} = \frac{L_2 I_2^2}{\sigma_{Cu}} \left[\frac{m}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right]$$

Et finalement :

$$\mathcal{P}_{cuivre} = \frac{2\pi N_2 a I_2^2}{\sigma_{Cu}} \left[\frac{m}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right]$$

Numériquement on trouve $\mathcal{P}_{cuivre} = 112 \text{ W}$ dans les conditions nominales.

50. On a $N_1 i_1 \gg N_2 i_2$ donc d'après le théorème d'Ampère sur une ligne de champ moyenne, $H\ell = N_1 i_1$. De plus on a $v_X = r i_1$. Donc $v_X = \frac{r\ell}{N_1} H$.

51. La fonction de transfert $\frac{v_Y}{v_2}$ s'écrit $\frac{v_Y}{v_2} = -\frac{R'}{R} \frac{1}{1+jR'C\omega}$.

Donc si $2\pi f \gg \frac{1}{R'C}$, le montage se comporte comme un intégrateur (inverseur) de constante de temps RC . On a donc :

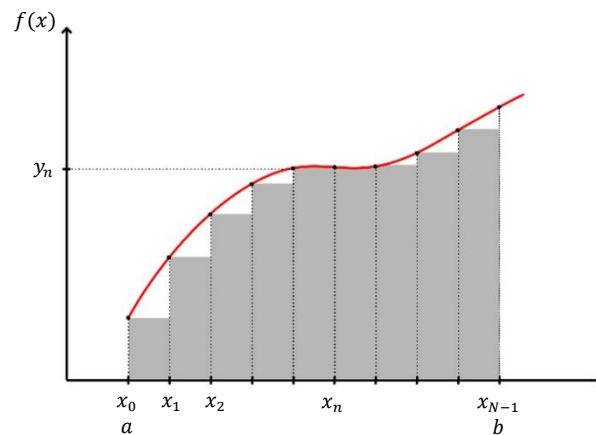
$$v_2 = -RC \frac{dv_Y}{dt}$$

Or d'après la loi de Faraday, $v_2 = -N_2 S \frac{dB}{dt}$. Donc finalement $v_Y = \frac{N_2 S B}{RC} + c^{te}$.

52. Si on veut réaliser ensuite un calcul intégral de l'aire du cycle par une méthode numérique, on peut considérer qu'une centaine de points par cycle est souhaitable, au minimum. On réalise donc une acquisition à $T_e = 200 \mu s$ par exemple (toute réponse entre $10 \mu s$ et $200 \mu s$ paraît raisonnable).

53. Il s'agit d'une énergie volumique, exprimée en $J \cdot m^{-3}$.

54. On subdivise l'intervalle $[a, b]$ ($b > a$) en $N - 1$ intervalles de même longueur et on pose $p = \frac{b-a}{N-1}$.



On ajoute les aires des rectangles égales à $(p \times y_i)_{0 \leq i \leq N-1}$. Cette aire tend vers l'intégrale cherchée lorsque $N \rightarrow \infty$.

55. Le code de l'étudiant B est incorrect car sa boucle conditionnelle (boucle « while ») ne s'arrête jamais : la condition est toujours vraie ! La valeur de i ne change jamais à l'intérieur de la boucle. On peut conseiller à l'étudiant B, s'il souhaite garder la même structure d'algorithme (un peu maladroit ici toutefois) d'incrémenter i à l'intérieur de la boucle.

56. Cette instruction permet de remplacer la valeur stockée dans la variable `aire` par sa valeur absolue. Oui, c'est indispensable ici car le cycle d'hystérésis étant parcouru dans le sens trigonométrique, on a $\oint B dH < 0$ alors que $\mathcal{A} > 0$: l'intégrale calculée est l'opposée de l'aire du cycle.

57. On calcule tout d'abord l'incertitude-type, avec $n = 10$: $u(\mathcal{A}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\mathcal{A}_i - \overline{\mathcal{A}})^2}{n-1} \right)}$

On obtient : $u(\mathcal{A}) = 5,2 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$.

Le résultat est caractérisé par la moyenne : $\mathcal{A} = 661,2 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$ et l'incertitude-type $u(\mathcal{A}) = 5,2 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$.

Pour réaliser le calcul d'un écart-normalisé, il faut inviter l'étudiant à calculer l'incertitude-type de sa propre série de mesures. On pourra ainsi savoir si l'écart entre vient de la variabilité des mesures de l'étudiant (qui pourraient être plus dispersées que celles de la série de données de l'énoncé) ou du fait que les deux transformateurs ne sont pas rigoureusement identiques.

58. Le rendement du transformateur dans ses conditions nominales, correspondant à une puissance transférée égale à $\mathcal{P} = 2,4 \text{ kW}$ s'écrit : $\eta = 1 - \frac{(\mathcal{P}_{fer} + \mathcal{P}_{cuivre})}{\mathcal{P} + \mathcal{P}_{fer} + \mathcal{P}_{cuivre}}$.

On a $\mathcal{P}_{cuivre} = 112 \text{ W}$ d'après le résultat de la question 49.

On a $\mathcal{P}_{fer} = V f \mathcal{A}$, donc numériquement, $\mathcal{P}_{fer} = 50 \text{ W}$.

Finalement, $\eta = 94 \%$.

Pour un transformateur de puissance apparente égale à $2,8 \text{ kVA}$ et de puissance active $2,4 \text{ kW}$, on a un ordre de grandeur plausible. En pratique le rendement est un peu moins bon ; il faut compter les pertes par courants de Foucault qui contribuent peu au bilan de puissance global pour un matériau feuilleté. Hors conditions nominales, le rendement peut également être plus faible.

Fin de la partie III.
