

Étude d'une membrane optomécanique

Ce sujet traite de divers aspects du domaine de l'optomécanique qui s'intéresse à l'interaction entre la lumière et un résonateur mécanique. Grâce à des mesures interférométriques, les mouvements du résonateur peuvent être observés avec une sensibilité prodigieuse, meilleure que l'attomètre (10^{-18} m) sur certains dispositifs. Avec une telle sensibilité, il est possible d'observer les fluctuations quantiques du résonateur. Cependant, ces dernières sont généralement masquées par le mouvement brownien provoqué par l'agitation thermique et il est nécessaire de fortement refroidir le résonateur pour observer son caractère quantique. La température à atteindre est généralement inférieure à celles accessibles par des techniques de cryogénie standard et l'on a recours à un refroidissement actif du résonateur.

Si la diversité des objets mécaniques qu'il est possible d'étudier est considérable, un des résonateurs les plus utilisés est une membrane diélectrique en nitrure de silicium, fortement tendue, de surface de l'ordre de 1 mm^2 et d'épaisseur quelques centaines de nanomètres. La problématique est alors d'avoir un facteur de qualité mécanique et une réflectivité optique de ce système les plus grands possible.

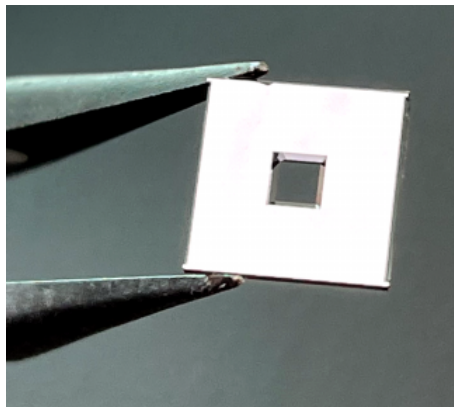


Figure 1: Membrane optomécanique : le cadre en silicium fait 5 mm de côté, la membrane carrée ultrafine au centre est quasiment parfaitement transparente.

Le problème se décompose en quatre parties très largement indépendantes. La première partie traite de l'aspect mécanique de la membrane et de son équilibre thermique. Cette partie se termine sur l'étude d'une technique de refroidissement actif permettant de réduire la température du résonateur au détriment d'une augmentation de son amortissement. La seconde partie s'intéresse à la mesure de l'amortissement de la membrane grâce à la technique de *ring down* qui nécessite l'extraction des quantités appelées quadratures du mouvement. La troisième partie étudie le profil spatial des modes de vibration mécanique ainsi que leur fréquence de résonance. Cette étude permet d'évaluer différents phénomènes d'amortissement tels que le rayonnement acoustique et les pertes intrinsèques dans le matériau. Enfin, la quatrième partie s'intéresse aux aspects optiques de la membrane considérée comme une couche fine diélectrique. On y étudie la possibilité de rendre la membrane extrêmement réfléchissante grâce à la gravure d'un cristal photonique.

Toutes les applications numériques seront données avec un seul chiffre significatif.

On donne :

Constante de Boltzmann	$k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = h/2\pi = 1,1 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

Pour les caractéristiques de la membrane et de son environnement, on prendra :

Masse volumique du nitrure de silicium	$\rho = 3200 \text{ kg m}^{-3}$
Epaisseur	$h = 100 \text{ nm}$
Largeur	$a = 1 \text{ mm}$
Masse du mode fondamental	$M = 80 \text{ ng}$
Pulsation du mode fondamental	$\Omega_M = 2\pi \times 400 \text{ kHz}$
Masse volumique de l'air	$\rho_0 = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$
Vitesse du son dans l'air à 300 K	340 ms^{-1}

Dans le problème, $\delta(x)$ désigne la distribution de Dirac, nulle partout sauf en $x = 0$ où elle diverge, avec la propriété que pour toute fonction f :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

On rappelle :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(2\pi t/T) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(2\pi t/T) dt = \frac{1}{2}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

Dans le texte, on utilise les notations $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ et $f' = \frac{df}{dx}$. Enfin, on rappelle que si $V(\vec{r})$ est un champ scalaire, $\vec{A}(\vec{r})$ un champ vectoriel, $f(x)$ une fonction d'une variable réelle et x_0 une constante réelle :

$$\vec{r} \otimes \vec{\text{grad}} V = \vec{0}$$

$$\text{div } \vec{r} \otimes \vec{A} = 0$$

$$\text{div } \vec{\text{grad}} V = \Delta V$$

$$\vec{r} \otimes \vec{r} \otimes \vec{A} = \vec{\text{grad}} \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\text{div}(V\vec{A}) = (\vec{\text{grad}} V) \cdot \vec{A} + (\text{div } \vec{A})V$$

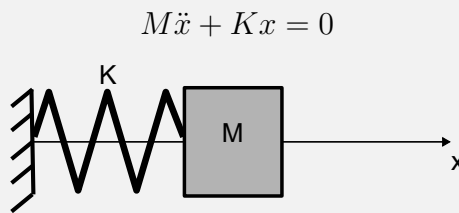
$$\vec{\text{grad}} f(x_0 + \vec{n} \cdot \vec{r}) = \vec{n} f'(x_0 + \vec{n} \cdot \vec{r})$$

1 Équilibre thermique de la membrane

Dans cette partie, on étudie les mouvements de la membrane induits par le couplage à son environnement. La membrane est assimilée à un oscillateur harmonique, constitué d'une masse M se déplaçant uniquement selon l'axe horizontal Ox , et d'un ressort sans masse, de raideur K . La position de la masse est repérée par son abscisse $x(t)$. La position de repos du système est à l'abscisse $x = 0$.

1. Faire un schéma du système équivalent à la membrane et écrire l'équation du mouvement de la masse en l'absence de frottement.

Réponse :



2. Donner la solution générale réelle de cette équation, en faisant intervenir la pulsation propre Ω_M du résonateur, que l'on exprimera en fonction des paramètres du système.

Réponse :

$$x(t) = A \cos(\Omega_M t) + B \sin(\Omega_M t)$$

A et B étant deux constantes dépendant des conditions initiales. Ou de manière équivalente :

$$x(t) = A \cos(\Omega_M t + \phi)$$

avec $\Omega_M = \sqrt{K/M}$

L'interaction de la membrane avec son environnement se traduit par une force de frottement visqueux

$$F_v = -M \Gamma \dot{x} \quad (1)$$

où Γ est le coefficient de frottement visqueux réel et strictement positif.

3. A quelle condition sur les paramètres Γ et Ω_M , peut-on encore parler d'un système oscillant ? Dans ce cas, exprimer la nouvelle pulsation Ω de résonance du système et montrer qu'au premier ordre en Γ/Ω_M elle est égale à celle du cas non amorti.

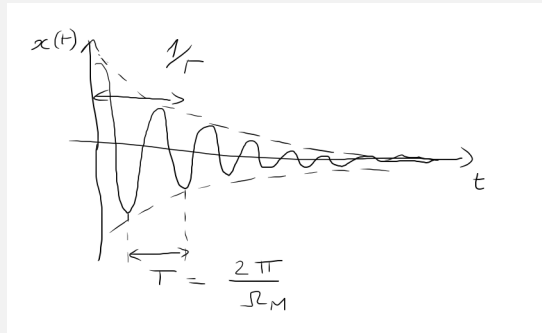
Réponse : L'équation différentielle devient $M\ddot{x} + M\Gamma\dot{x} + Kx = 0$ et l'équation caractéristique est $r^2 + \Gamma r + \Omega_M^2 = 0$ dont le discriminant est $\Gamma^2 - 4\Omega_M^2$. Les solutions ont une partie imaginaire si et seulement si $\Gamma < 2\Omega_M$

La nouvelle pulsation est la partie imaginaire de la solution :

$$\Omega = \sqrt{\Omega_M^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} \simeq \Omega_M + O(\Gamma^2/\Omega_M^2)$$

4. Tracer $x(t)$. On fera apparaître sur le graphe les principales constantes de temps du problème.

Réponse :



La force de frottement visqueux provient du couplage avec l'environnement qui est à une température T non nulle et s'accompagne de l'introduction dans le système de fluctuations. Ce phénomène se traduit par une force supplémentaire aléatoire appelée force de Langevin. Sa composante selon l'axe du mouvement est notée F_T , c'est un bruit blanc gaussien avec les propriétés statistiques suivantes :

$$\langle F_T(t) \rangle = 0, \quad (2)$$

$$\langle F_T(t) F_T(t') \rangle = A_T \delta(t - t') \quad (3)$$

$$\text{avec } A_T = 2M\Gamma k_B T \quad (4)$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann et où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne statistique.

5. Que traduisent physiquement les équations 2 et 3 ?

Réponse : 1ère équation : La valeur moyenne de F_T est nulle, la force n'a pas de biais.
2nde équation la force n'a pas de mémoire, les valeurs de F_T sont décorréées pour des temps non égaux.

La solution de l'équation différentielle d'un oscillateur amorti en présence d'une force extérieure

$F_{\text{ext}}(t)$ autre que les forces de rappel et d'amortissement est donnée par :

$$x(t) = \overbrace{\int_0^t \chi(t-\tau) F_{\text{ext}}(\tau) d\tau}^{\text{1er terme}} + \overbrace{M[(\Gamma x(0) + \dot{x}(0))\chi(t) + x(0)\dot{\chi}(t)]}^{\text{2nd terme}} \quad (5)$$

$$\text{avec } \chi(t) = \frac{\sin(\Omega_M t)}{M\Omega_M} \exp\left[-\frac{\Gamma}{2}t\right] \quad (6)$$

6. Qualitativement, que représentent les deux termes dans l'expression de $x(t)$? Que traduisent les bornes d'intégration 0 et t dans le premier terme, en particulier pourquoi l'intégration ne se fait-elle pas de $-\infty$ à $+\infty$?

Réponse : Le 2nd terme représente la réponse aux conditions initiales à $t=0$, c'est à dire le régime transitoire. Le premier terme est la réponse à la force extérieure. On intègre depuis 0 car toute l'information sur x à l'instant $t = 0$ est contenue dans les conditions initiales. On n'intègre que jusqu'à t car la position $x(t)$ ne peut pas dépendre des valeurs de F à des temps $> t$ par causalité.

7. Que devient le second terme pour des temps t grands devant $1/\Gamma$? Vérifier alors que, dans le cas où la seule force extérieure est la force de Langevin, la valeur moyenne de la position, $\langle x(t) \rangle$, est nulle.

Réponse : le second terme s'annule car χ et sa dérivée temporelle tendent exponentiellement vers 0 avec un temps caractéristique $2/\Gamma$.

On a alors

$$\langle x(t) \rangle = \left\langle \int_0^t \chi(t-\tau) F_T(\tau) d\tau \right\rangle = \int_0^t \chi(t-\tau) \langle F_T(\tau) \rangle d\tau = 0$$

par linéarité de l'intégrale et de la valeur moyenne (on peut inverser intégrale et valeur moyenne) et par l'équation 2.

8. Toujours dans le cas où la seule force extérieure est la force de Langevin et pour des instants t suffisamment grands devant $1/\Gamma$, calculer les quantités $\langle x^2(t) \rangle$ et $\langle \dot{x}^2(t) \rangle$.

On pourra utiliser la relation suivante valable pour une fonction de plusieurs variables :

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t, \tau) d\tau = f(t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau) d\tau \quad (7)$$

ainsi que

$$\int_0^{+\infty} \chi^2(\tau) d\tau \simeq \frac{1}{2M^2\Omega_M^2\Gamma} \quad (8)$$

$$\int_0^{+\infty} \dot{\chi}^2(\tau) d\tau \simeq \frac{1}{2M^2\Gamma} \quad (9)$$

Réponse : En attendant suffisamment longtemps (plusieurs $2/\Gamma$) il ne reste que le 1er terme dans $x(t)$.

$$\begin{aligned}
\langle x^2(t) \rangle &= \int_0^t \int_0^t \chi(t-\tau) \chi(t-\tau') \langle F_L(\tau) F_L(\tau') \rangle d\tau d\tau' \\
&= 2M\Gamma k_B T \int_0^t \int_0^t \chi(t-\tau) \chi(t-\tau') \delta(\tau-\tau') d\tau d\tau' \\
&= 2M\Gamma k_B T \int_0^t \chi^2(t-\tau) d\tau = 2M\Gamma k_B T \int_0^t \chi^2(\tau) d\tau = \frac{2\Gamma k_B T}{M\Omega_M^2} \int_0^{+\infty} \sin^2(\Omega_M t) \exp[-\Gamma t] d\tau \\
&= \frac{k_B T}{M\Omega_M^2}
\end{aligned}$$

En dérivant l'équation (5) on trouve :

$$\dot{x}(t) = \chi(0)F_{ext}(t) + \int_0^t \dot{\chi}(t-\tau)F_{ext}(\tau)d\tau + M[(\Gamma x(0) + \dot{x}(0))\dot{\chi}(t) + x(0)\ddot{\chi}(t)]$$

qui, pour des temps longs, donne :

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \dot{\chi}(t-\tau)F_{ext}(\tau)d\tau$$

un calcul similaire donne

$$\begin{aligned}
\langle x^2(t) \rangle &= 2M\Gamma k_B T \int_0^t \dot{\chi}^2(t-\tau) d\tau \\
&= 2M\Gamma k_B T \int_0^{+\infty} \dot{\chi}^2(\tau) d\tau = \frac{k_B T}{M}
\end{aligned}$$

9. Définir l'énergie potentielle E_p et l'énergie cinétique E_c du résonateur et montrer que sous l'effet de la force de Langevin on a la relation :

$$\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (10)$$

Réponse : On définit $E_p = \frac{1}{2} M \Omega_M^2 x^2(t)$ et $E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2(t)$

10. Pour un oscillateur de pulsation $\Omega_M = 2\pi \times 400$ kHz et de masse $M = 80$ ng, à température ambiante, donner l'ordre de grandeur de l'amplitude moyenne des oscillations et le comparer à la taille d'un atome.

Réponse : $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{M\Omega_M^2}} = 3 \times 10^{-12}$ m qui est 100 fois plus petit qu'un rayon atomique.

Malgré la très faible amplitude des fluctuations thermiques, celles-ci restent en pratique 3 à 4 ordres de grandeur plus importantes que l'amplitude des fluctuations quantiques que l'on cherche à observer dans les expériences d'optomécanique. Il est possible de diminuer les fluctuations thermiques en modifiant la température du résonateur par une méthode active : on mesure la position de l'oscillateur et on applique une force de contre-réaction du type :

$$F_{\text{cr}}(t) = -g_1 K x(t) - g_2 M \Gamma \dot{x}(t) \quad (11)$$

où g_1 et g_2 sont des constantes sans dimension caractérisant les gains de la chaîne de mesure et de contre-réaction.

11. En utilisant les équations (5) et (6) et en considérant $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, montrer que le déplacement $x(t)$ du résonateur soumis à la force de Langevin et à la force supplémentaire F_{cr} de contre-réaction, se met sous la forme

$$x(t) = \int_0^t \chi_{\text{cr}}(t - \tau) F_T(\tau) d\tau \quad (12)$$

pour une fonction χ_{cr} que l'on précisera.

Réponse : L'équation différentielle devient $M\ddot{x} + M\Gamma\dot{x} + Kx = -g_1 Kx(t) - g_2 M\Gamma\dot{x}(t) + F_T(t)$ c'est à dire :

$$M\ddot{x} + M(1 + g_2)\Gamma\dot{x} + K(1 + g_1)x = F_T(t)$$

On retrouve l'équation standard avec un $\Omega'_M = \Omega\sqrt{1 + g_1}$ et un $\Gamma' = \Gamma(1 + g_2)$. La solution est donc similaire à celle des éqs (5) et (6) avec

$$\chi_{\text{cr}}(t) = \frac{\sin(\Omega_M \sqrt{1 + g_1} t)}{M \Omega_M \sqrt{1 + g_1}} \exp \left[-\frac{\Gamma(1 + g_2)}{2} t \right]$$

12. En déduire que pour des gains g_2 positifs, l'énergie mécanique du résonateur correspond à celle d'un oscillateur à une température T' que l'on précisera. En déduire que l'on peut refroidir le résonateur au détriment d'une augmentation de l'amortissement.

Réponse : Le même calcul qu'en question 9 donne

$$E_p = E_c = \frac{1}{2} k_B \frac{T}{1 + g_2}$$

d'où

$$T' = \frac{T}{1 + g_2}$$

Le facteur de refroidissement $(1 + g_2)$ se retrouve sur le coefficient Γ .

2 Mesure du facteur de qualité par *Ring Down*

Dans le document scientifique 1 ci-dessous et pour les questions traitant d'électrocinétique, on utilise la notation j pour désigner le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$.

Document scientifique 1 : Extrait de thèse

Pour un système mécanique, on définit les quadratures X_1 et X_2 du mouvement comme les composantes de la position sur les fonctions sinus et cosinus oscillant à une pulsation de référence Ω_{ref} ,

$$x(t) = X_1(t) \cos(\Omega_{\text{ref}}t) + X_2(t) \sin(\Omega_{\text{ref}}t) \quad (1.A)$$

L'observation des quadratures correspond en fait à l'étude du mouvement dans un référentiel tournant à Ω_{ref} . Dans le cas d'un oscillateur harmonique de pulsation Ω_M , prendre la pulsation du référentiel tournant Ω_{ref} proche de (ou égale à) la pulsation Ω_M permet de s'affranchir dans le mouvement $x(t)$ de la partie purement oscillante et de n'étudier que l'évolution lente des quadratures. En effet, le temps caractéristique d'évolution de l'amplitude d'oscillation d'un mode du résonateur est l'inverse de son taux de relaxation Γ qui, pour un oscillateur harmonique faiblement amorti, est très petit devant Ω_M . Les quadratures sont donc lentement variables par rapport à la période d'oscillation du résonateur. Cette propriété permet de négliger les termes évoluant à des fréquences élevées, voisines de $\Omega_M/2\pi$, dans l'expression des composantes de Fourier des quadratures X_1 et X_2 . Dans ce cas, l'expression obtenue coïncide avec la définition usuelle des quadratures, telle qu'elle existe par exemple en optique pour un mode du champ électromagnétique.

Les quadratures de la position $x(t)$ sont obtenues expérimentalement par une méthode de démodulation. Pour obtenir par exemple la quadrature X_1 , on multiplie la fonction $x(t)$ par la fonction $Q_1(t) = \cos(\Omega_{\text{ref}}t)$. En utilisant l'équation 1.A, on trouve que le résultat est la somme de $X_1(t)/2$ et d'autres termes oscillants à des pulsations de l'ordre de $2\Omega_M$. Un filtre passe-bas permet d'éliminer ces termes à haute fréquence et d'accéder ainsi à X_1 au gain du filtre près. L'extraction de X_2 se fait de manière similaire, mais en multipliant $x(t)$ par $Q_2(t) = \sin(\Omega_{\text{ref}}t)$.

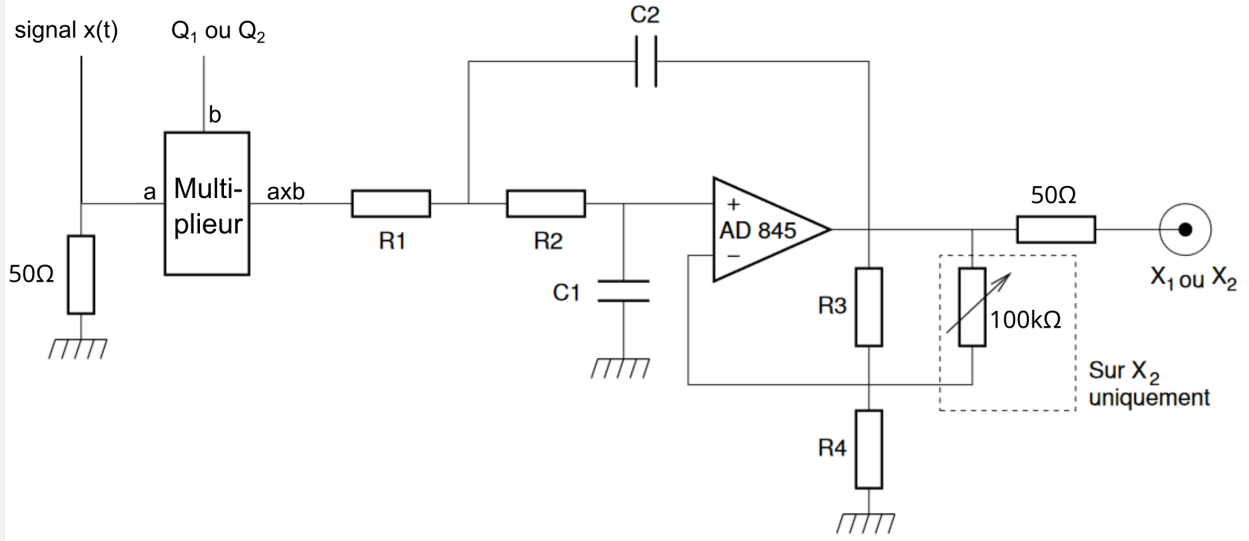


Figure A: Circuit électronique d'extraction des quadratures du signal $x(t)$.

En pratique, on utilise un multiplieur pour effectuer la multiplication du signal $x(t)$ et de la cosinusoïde Q_1 ou sinusoïde Q_2 de référence. La sortie de chaque mélangeur est filtrée par un filtre passe-bas du second ordre construit autour d'un amplificateur linéaire intégré rapide AD 845.

Le gain G du filtre à fréquence nulle vaut $\frac{R_3+R_4}{R_4}$. En pratique les résistances R_1 et R_2 sont égales, ainsi que les capacités C_1 et C_2 . La figure ci-dessous montre le module de la fonction de transfert pour différents gains G . Pour les valeurs particulières $G = 3 \pm \sqrt{2}$ du gain, on élimine les termes en ω^2 dans l'expression du module carré de $H[j\omega]$:

$$|H[j\omega]|^2 = \frac{G^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4} \quad (1.B)$$

où ω_0 est la pulsation de coupure égale à $1/R_1C_1$ fixée ici par la valeur des composants à environ 500 Hz. En pratique on utilise un gain légèrement supérieur au gain optimal $G = 3 - \sqrt{2}$ (le filtre est instable pour la solution $G = 3 + \sqrt{2}$ car $H[j\omega]$ possède des pôles de partie réelle positive), afin d'augmenter sensiblement la plage de fréquence où la réponse du filtre est plate. Pour la valeur $G = 1,65$ on obtient une fonction de transfert très plate, avec une variation relative d'amplitude inférieure à 0.5 % jusqu'à des pulsations de $0,46 \times \omega_0$ mais qui conserve une pente raide au delà de la fréquence de coupure.

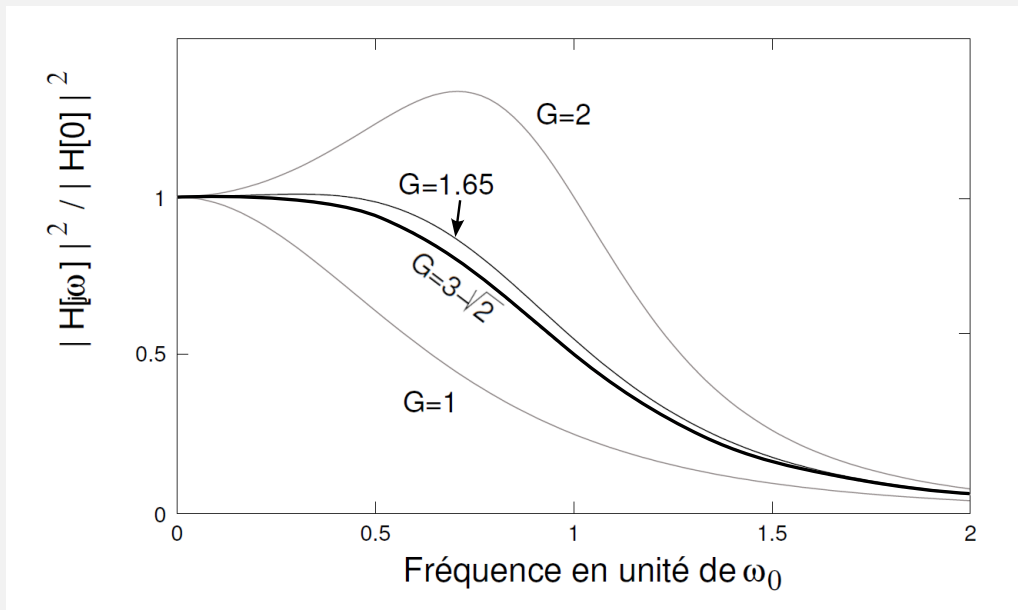


Figure B: Module carré normalisé de la fonction de transfert du filtre pour différentes valeurs de G .

13. Quelle est l'utilité des résistances de valeur $50\ \Omega$ disposées en entrée et en sortie du circuit de la Figure A du document scientifique 1 ? Pourquoi utiliser une telle valeur et quels problèmes entraînerait leur absence ?

Réponse : Ces résistances assurent l'adaptation d'impédance avec les câbles BNC qui sont eux même adaptés en $50\ \Omega$. Sans ces résistances il risque d'apparaître des ondes réfléchies dans les câbles.

14. Pourquoi cherche-t-on à obtenir la fonction $|H[j\omega]|$ la plus plate possible en fréquence ? Quel autre paramètre non représenté sur la figure B du document scientifique 1 devrait-on contrôler pour s'assurer de cet aspect ?

Réponse : Les signaux dont les fréquences sont inférieures à la fréquence de coupure verront le même gain et seront les moins déformés possibles : pas d'atténuation ou d'amplification de certaines fréquences. On devrait également contrôler l'argument de H qui pourrait modifier la phase des diverses composantes des signaux.

15. En ne considérant que la partie du circuit représentée sur la figure 2, calculer la fonction de transfert $H[j\omega] = V_s/V_e$ du filtre. On exprimera le résultat en fonction uniquement de G , $\omega_0 = 1/RC$ et ω .

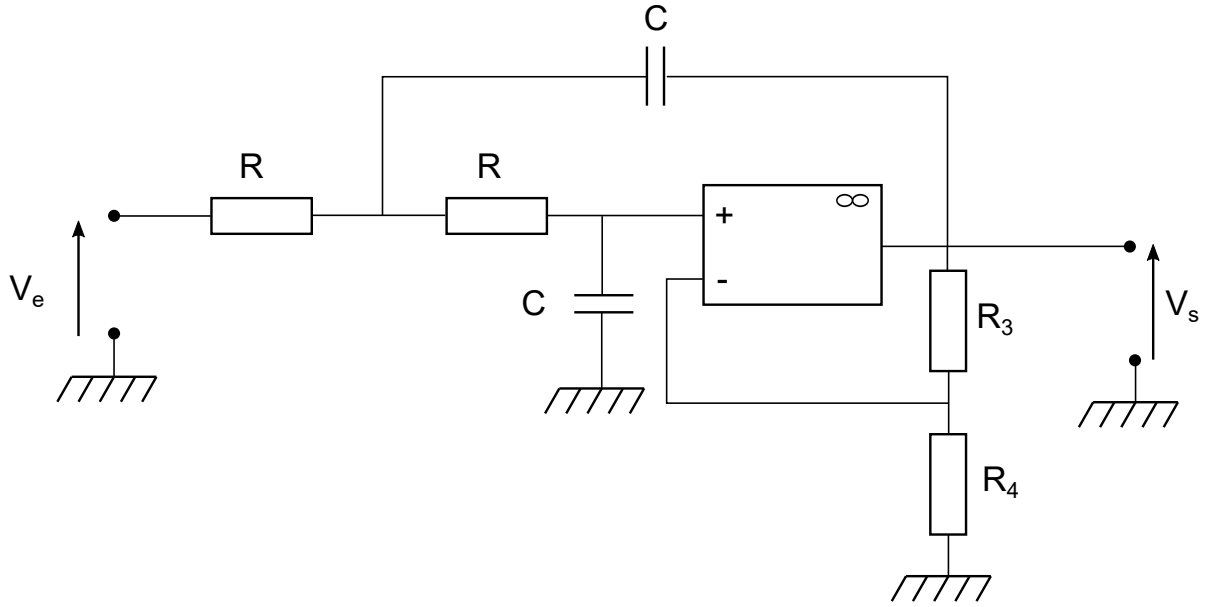


Figure 2: Circuit électronique du filtre.

Réponse :

$$H[j\omega] = \frac{G}{1 + j(3 - G)RC\omega - R^2C^2\omega^2} = \frac{G}{1 + j(3 - G)\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

16. Pourquoi le fait que $H[j\omega]$ possède un pôle (une annulation du dénominateur) dont la partie réelle est positive, entraîne une instabilité du filtre ? Montrer que c'est le cas si le gain est supérieur à 3.

Réponse : $\frac{V_s[j\omega]}{V_e[j\omega]} = H[j\omega]$ donc $\frac{V_s[j\omega]}{H[j\omega]} = V_e[j\omega]$ Si $1/H[j\omega]$ s'annule pour un certain $j\omega$, on peut avoir V_s non nul comme solution alors même qu'il n'y a rien en entrée. Si de plus $j\omega$ à une partie réelle positive ($j\omega = ja + \kappa$ avec $\kappa > 0$), on a $V_s = \exp(j\omega t) = \exp(jat) \exp(+\kappa t)$ qui est une solution divergente exponentiellement.

Si $G > 3$, en posant $z = \omega/\omega_0$, le dénominateur de H s'écrit $1 - jaz - z^2 = -(z - z_1)(z - z_2)$ avec $a = G - 3 > 0$. Le produit des racines vaut -1 (mais ce n'est pas utile) et la somme vaut $-ja$ donc l'une au moins à une partie imaginaire négative et $j\omega_{1/2} = j\omega_0 z_{1/2}$ à une partie réelle positive.

17. Compte tenu de la façon dont sont extraites les quadratures (document scientifique 1), donner l'expression de $X_1(t)$ et $X_2(t)$ en fonction de $x(t)$ et Ω_{ref} en considérant que la pulsation Ω_{ref} est proche de Ω_M . En déduire l'expression de $X_1(t)$ et $X_2(t)$ dans le cas d'un mouvement faiblement amorti (Γ petit devant Ω_M) du type :

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega_M t) \exp\left[-\frac{\Gamma}{2}t\right] \quad (13)$$

On ne conservera que les composantes lentement variables dans l'expression des quadratures.

Réponse :

On dit dans le document qu'expérimentalement les quadratures sont obtenues par multiplication par des signaux sinusoïdaux de pulsation Ω_{ref} puis les hautes fréquences sont éliminées par filtrage. Mathématiquement cela se traduit par :

$$X_1(t) = 2\langle x(t) \cos(\Omega_{ref}t) \rangle$$

$$X_2(t) = 2\langle x(t) \sin(\Omega_{ref}t) \rangle$$

Les crochets $\langle \dots \rangle$ représente l'effet du filtrage basse fréquence. Ce filtrage est équivalent à une moyenne temporelle glissante ou à une convolution par une fonction lentement variable. Il a pour effet d'éliminer les termes à hautes fréquences.

En appliquant ces formules sur $x(t)$:

$$X_1(t) = 2\langle x_0 \cos(\Omega_M t) \exp\left[-\frac{\Gamma}{2}t\right] \cos(\Omega_{ref}t) \rangle$$

or $\langle \cos(\Omega_M t) \cos(\Omega_{ref}t) \rangle = \langle \frac{1}{2}[\cos((\Omega_M - \Omega_{ref})t) + \cos((\Omega_M + \Omega_{ref})t)] \rangle$. Le terme à la pulsation $\Omega_M + \Omega_{ref}$ est éliminé par le filtrage alors que celui à $\Omega_M - \Omega_{ref}$ est conservé. donc

$$X_1(t) = x_0 \cos(\Omega_M - \Omega_{ref})t \exp\left[-\frac{\Gamma}{2}t\right]$$

de même

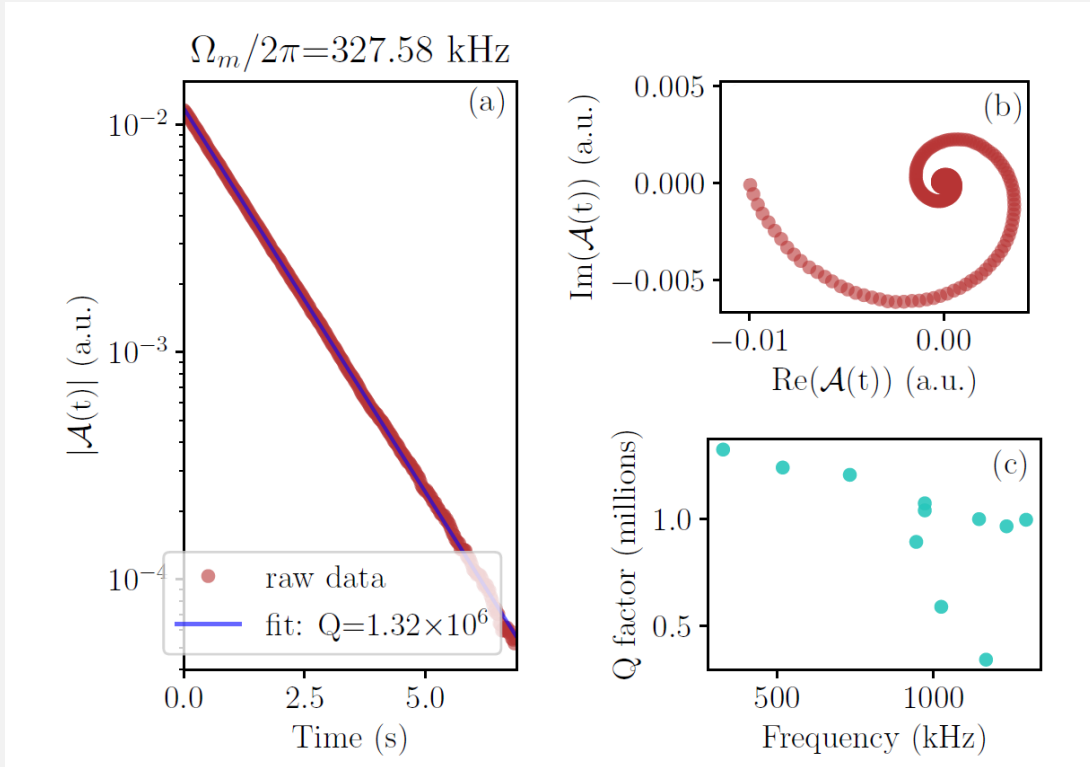
$$X_2(t) = -x_0 \sin(\Omega_M - \Omega_{ref})t \exp\left[-\frac{\Gamma}{2}t\right]$$

Document scientifique 2 : Extrait de thèse

Ring-down peut se traduire par tintement de cloche : le son s'atténue lentement après une excitation brève.

La mesure du facteur de qualité par *ring-down* consiste à appliquer sur la membrane une excitation mécanique grâce, par exemple, à un élément piézo-électrique placé en contact avec la membrane. L'excitation produit une vibration monochromatique d'amplitude beaucoup plus importante que le mouvement thermique. L'excitation est alors brusquement stoppée et on mesure de manière optique les déplacements de la membrane. Les quadratures X_1 et X_2 sont extraites par démodulation et on suit l'évolution dans l'espace complexe de l'amplitude complexe $\mathcal{A}(t)$ définie par :

$$\mathcal{A}(t) = X_1(t) + iX_2(t) \quad (2.A)$$



La figure ci-dessus présente l'évolution du module de $\mathcal{A}$ (figure (a)), ainsi que la trajectoire de $\mathcal{A}$ dans le plan complexe (figure (b)). La figure (c) présente les facteurs de qualité $Q = \Omega_M/\Gamma$ des premiers modes mécaniques de la membrane en fonction de leur fréquence.

18. Expliquer l'allure de l'évolution de $|\mathcal{A}|$ et celle de la trajectoire de $\mathcal{A}$ dans le plan complexe présentées dans le document scientifique 2.

Réponse : D'après la question précédente, $|\mathcal{A}| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = |x_0|[\cos^2(\Omega_M - \Omega_{ref})t + \sin(\Omega_M - \Omega_{ref})t] \exp(-\Gamma t/2) = |x_0| \exp(-\Gamma t/2)$ On attend donc une décroissance exponentielle. C'est ce que l'on observe sur le graphe (a) qui est en échelle semi-log. Dans l'espace complexe on obtient une spirale décroissante exponentiellement et tournant à la pulsation $\Omega_M - \Omega_{ref}$

3 Modes propres de la membrane

On étudie dans cette partie les caractéristiques mécaniques des modes de vibration de la membrane.

Profil spatial et fréquence des modes propres

On considère une membrane fine, carrée de côté a et d'épaisseur h très petite devant a . On suppose d'autre part que la membrane est maintenue rigidement sur tous ses bords. Elle est de plus soumise à une forte tension uniformément dans les directions x et y dont on va estimer les effets.

On considère le morceau de membrane de forme parallélépipédique de taille L_x par L_y et d'épaisseur h représenté sur la Figure 3. Sa surface horizontale est notée S . Sa surface latérale de droite Σ , grisée sur la Figure 3, subit une force extérieure de tension $\vec{T}$ normale à Σ et dirigée vers l'extérieur.

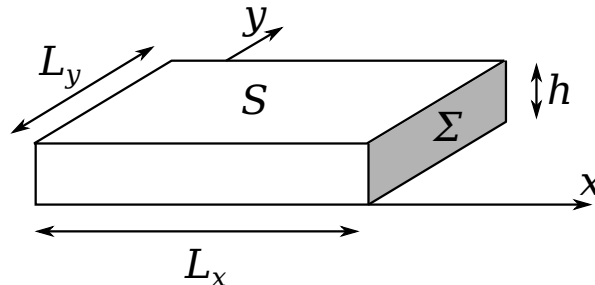


Figure 3: Morceau de membrane

19. Lorsque le morceau de membrane subit une petite élongation dans la direction x , montrer que son énergie potentielle élastique augmente d'une quantité $h\sigma dS$, où σ est une constante que l'on exprimera en fonction de T , L_y et h .

Réponse : Avec un étirement de dx dans la direction x le travail de la force T est $dE_p = Tdx$. Avec $dS = L_y dx$ on obtient $dE_p = h\sigma dS$ avec $\sigma = T/hL_y$.

La constante σ est appelée tension de la membrane et s'exprime en pascal. Les membranes utilisées ont généralement des tensions de l'ordre du GPa à la limite de rupture du matériau.

On considère dans cette partie que la membrane est suffisamment fine pour négliger ce qui se passe dans son épaisseur. La membrane au repos se situe dans le plan horizontal xy et l'on note $w(x, y, t)$ le déplacement vertical de la membrane par rapport à sa position au repos (voir Figure 4). La fonction w s'annule en $x = \pm \frac{a}{2}$ et $y = \pm \frac{a}{2}$.

On considère dans la suite que la déformation w reste petite devant les dimensions de la membrane.

20. On considère la coupe de la membrane dans le plan xz représentée à droite sur la Figure 4, subissant le déplacement $w(x, 0, t)$. Montrer que l'élément de membrane de cette coupe

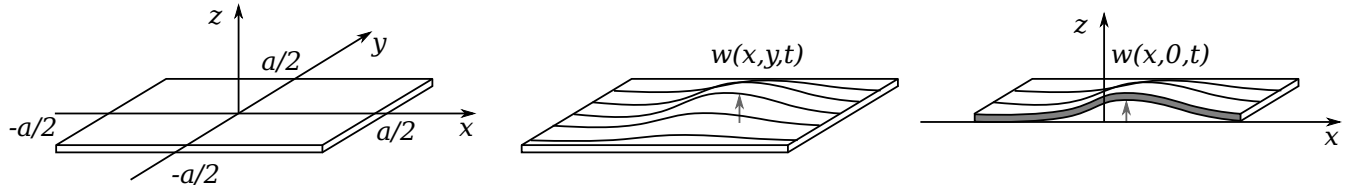


Figure 4: A gauche, membrane au repos. Au milieu, membrane sous l'effet d'un déplacement. A gauche coupe de la membrane dans le plan xz .

compris entre x et $x + dx$ est étiré dans la direction x par rapport à sa position au repos d'une longueur $d\ell$:

$$d\ell = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (14)$$

Réponse : La longueur de l'élément entre x et $x + dx$ vaut

$$\sqrt{dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} \simeq dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)$$

21. En déduire que l'augmentation V d'énergie potentielle élastique de la membrane est

$$V = \frac{\sigma h}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (15)$$

Réponse : On intègre sur toute la surface et dans les directions x et y

22. Écrire de la même façon l'énergie cinétique K de la membrane. On fera intervenir la masse volumique de la membrane ρ et la dérivée temporelle de w .

Réponse : Pour l'élément $dx dy$ la vitesse est verticale et vaut $v = dw/dt$

l'énergie de l'élément est $dEc = \frac{1}{2} m v^2$ avec $m = \rho h dx dy$

$$K = \frac{\rho h}{2} \iint \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy$$

On cherche des solutions sous la forme :

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}(t) \xi_{nm}(x, y) \quad (16)$$

avec

$$\xi_{n,m}(x, y) = \sin \left(\frac{n\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right) \sin \left(\frac{m\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) \quad (17)$$

23. Pourquoi une telle décomposition est-elle toujours possible quelle que soit la fonction w ? On s'interrogera en particulier sur l'utilisation des fonctions sinus et sur les arguments de ces fonctions.

Réponse : A temps fixé c'est une décomposition en série de Fourier à deux dimensions en x et y . L'utilisation du sinus permet de respecter les conditions aux limites $w = 0$ en $x = -a/2$ et $y = -a/2$, Les $n\pi/a$ et $m\pi/a$ permettent de respecter les conditions $w = 0$ en $x = a/2$ et $y = a/2$.

Les coefficients q_{mn} peuvent être considérés comme des coordonnées généralisées et permettent un traitement de la dynamique du système grâce à la mécanique lagrangienne. Pour ce système, le lagrangien L est défini comme la différence entre l'énergie cinétique K et l'énergie potentielle V :

$$L = K - V \quad (18)$$

24. Montrer que le lagrangien du système en fonction des coordonnées généralisées $\{q_{mn}\}$ et de leurs dérivées temporelles $\{\dot{q}_{mn}\}$ se met sous la forme :

$$L(\{q_{mn}\}, \{\dot{q}_{mn}\}) = A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{q}_{nm}^2 - B_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^2 (n^2 + m^2) \quad (19)$$

avec des constantes A_0 et B_0 que l'on exprimera en fonction de σ , ρ , a et h .

Réponse : $B_0 = \frac{\sigma h \pi^2}{8}$ et $A_0 = \frac{\rho h a^2}{8}$

Dans ce formalisme les coordonnées généralisées satisfont les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial q_{mn}} \quad (20)$$

25. Montrer que chaque coordonnée $q_{nm}(t)$ satisfait une équation différentielle du second ordre.

Réponse : On applique

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{nm}} = \frac{\partial L}{\partial q_{nm}}$$

Attention, en dérivant par rapport à une seule coordonnée, la double somme tombe. On trouve donc

$$2A_0 \ddot{q}_{nm} = -2B_0(n^2 + m^2)q_{nm}$$

26. En déduire que la membrane possède une infinité de modes propres de vibration, indexés par les entiers n et m non nuls et dont on exprimera les fréquences de résonance f_{nm} en fonction A_0 , B_0 , n et m puis de a , σ , ρ , n et m .

Réponse : On a une infinité de variables qui chacune vérifie une équation d'oscillateur harmonique. Chaque q_{nm} correspond donc à un mode, sa fréquence est $f_{nm} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{B_0}{A_0}(n^2 + m^2)} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\sigma(n^2 + m^2)}{\rho}}$

La masse M_{nm} du mode n, m représente la masse qui est effectivement mise en mouvement par le mode. Si l'on considère que seul le mode n, m est excité, l'énergie cinétique de la membrane s'écrit :

$$K = \frac{1}{2} M_{nm} \dot{q}_{mn}^2(t) \quad (21)$$

27. Montrer qu'avec cette définition tous les modes de la membrane ont la même masse que l'on précisera.

Réponse :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} M_{nm} \dot{q}_{mn}^2(t) = \int_S \frac{1}{2} \rho h \dot{w}(x, y, t)^2 dx dy = \int_S \frac{1}{2} \rho h \dot{W}_{mn}^2(t) \xi_{mn}^2(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \rho h \dot{W}_{mn}^2(t) \int_S \xi_{mn}^2(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \rho h \dot{W}_{mn}^2(t) \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

D'où

$$M_{mn} = \frac{1}{4} \rho h a^2$$

Document scientifique 3 : Extrait de thèse

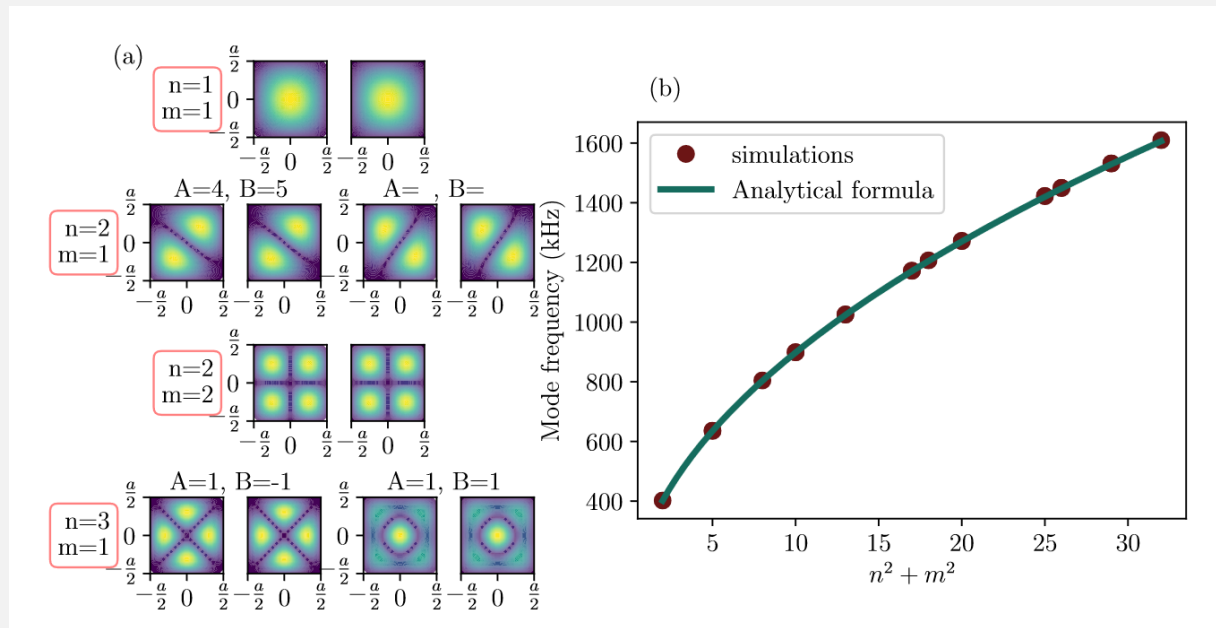
The frequencies f_{nn} are non degenerate and the modes node lines draw a rectangular grid, with equations $y_i = -\frac{a}{2} + i\frac{a}{n}$ and $x_j = -\frac{a}{2} + j\frac{a}{n}$ for $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket$. The mode amplitude reads:

$$\xi \propto \sin\left(\frac{n\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}\left(y + \frac{a}{2}\right)\right) \quad (3.A)$$

On the other hand, due to the membrane symmetry, the frequencies f_{mn} , with $m \neq n$ are degenerate. The mode amplitude is:

$$\xi \propto A \sin\left(\frac{n\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(y + \frac{a}{2}\right)\right) + B \sin\left(\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}\left(y + \frac{a}{2}\right)\right) \quad (3.B)$$

where A and B are two arbitrary real constants. The frequencies and mode shapes obtained with those formulas show a remarkable agreement with FEM (Finite Element Modelisation) simulations, as shown in figure below:



(a) mode shapes for the first 6 modes of a square membrane. For each mode, the simulated mode shape is on the left, while the mode shape given by the analytics formula is on the right. (b) Frequencies of the first 20 modes of a square membrane of width $a = 1$ mm, thickness $h = 100$ nm and internal stress $\sigma = 1$ GPa. The simulated frequencies are presented as dots, while the straight line corresponds to the formula.

28. Le document scientifique 3 présente les profils des modes de plus basses fréquences d'une membrane carrée. Les modes de la ligne ($n = 2, m = 1$) ne semblent pas respecter les symétries de la membrane. Expliquer ce phénomène.

Réponse : Les modes ($n = 2, m = 1$) sont dégénérés, les solutions sont des superpositions des 2 modes. C'est l'ensemble des solutions qui respecte les symétries de la membrane.

29. Les coefficients réels A et B (équation 3.B) ont été choisis égaux à 4 et 5 pour définir le premier mode ($n = 2, m = 1$) de la figure du document scientifique 3. Quels sont les coefficients A et B (à un facteur de normalisation près) du deuxième mode ?

Réponse : Il faut que les 2 modes soient orthogonaux, $A = 5, B = -4$ convient

Pertes mécaniques par rayonnement acoustique

Il existe divers canaux de perte d'énergie pour l'oscillateur. Le plus évident est dû au rayonnement acoustique dans l'air entourant la membrane.

On considère l'air comme un gaz parfait de pression $P(\vec{r}, t)$, de masse volumique $\rho_g(\vec{r}, t)$ et de vitesse eulérienne $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

30. Rappeler l'équation de conservation de la masse dans le fluide qui lie ρ_g et $\vec{v}$.

Réponse :

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \text{div}(\rho_g \vec{v}) = 0$$

L'équation d'Euler dans le fluide s'écrit :

$$\rho_g \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_g (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = -\vec{\text{grad}} P \quad (22)$$

On ne s'intéresse qu'aux petites variations des grandeurs P , ρ_g et $\vec{v}$ autour de leur valeur moyenne respective P_0 , ρ_0 et $\vec{v}_0 = \vec{0}$ (le fluide étant au repos) :

$$\begin{cases} P = P_0 + P_a \\ \rho_g = \rho_0 + \rho_a \\ \vec{v} = \vec{v}_a \end{cases} \quad (23)$$

31. Réécrire les équations de conservation de la masse et d'Euler (équation 22) au premier ordre en P_a , ρ_a et $\vec{v}_a$.

Réponse :

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v}_a = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} P_a.$$

32. Dans le cas d'un déplacement de l'air isentropique, pourquoi la pression ne dépend-elle que de la variable ρ_g ?

Réponse : Pour un gaz parfait $dU = nC_v dT = -PdV$ pour une transformation adiabatique. Cela conduit à $PV^\gamma = \text{constante}$ ou encore $P/\rho_g^\gamma = \text{const.}$

On introduit la constante c_0 définie par la dérivée de la pression par rapport à la masse volumique à entropie constante :

$$c_0^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho_g} \right|_{S, P=P_0, \rho_g=\rho_0} \quad (24)$$

33. Quelle est la dimension de la constante c_0 . Exprimer c_0 en fonction de P_0 , ρ_0 et de l'indice adiabatique γ appelé également coefficient de Laplace.

Réponse : c_0 est une vitesse. Pour une transformation adiabatique on a $P/\rho_g^\gamma = \text{const}$ donc $c_0 = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$

34. Écrire l'équation de propagation pour la pression acoustique P_a .

Réponse : En dérivant la conservation de la masse :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = 0$$

En utilisant Euler linéarisée :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \operatorname{div} \operatorname{grad} P_a = 0$$

Enfin en utilisant l'expression de c_0 :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 P_a}{\partial t^2} - \Delta P_a = 0$$

La vitesse des ondes est donc c_0 .

35. Donner pour P_a la forme générale d'une onde plane (pas nécessairement harmonique), solution de l'équation de propagation, se propageant dans une direction quelconque orientée par le vecteur unitaire $\vec{n}$. Préciser la vitesse de propagation de l'onde. Donner également le champ de vitesse $\vec{v}_a$ de cette onde.

Réponse : Une onde plane générale se propageant dans la direction $\vec{n}$ à la vitesse v s'écrit :

$$P_a(\vec{r}, t) = f(vt - \vec{n} \cdot \vec{r})$$

Cette fonction est bien solution de l'équation de propagation si $v = c_0$.

De même :

$$\vec{v}_a(\vec{r}, t) = \vec{g}(c_0 t - \vec{n} \cdot \vec{r})$$

D'après Euler linéarisée :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = -\vec{\operatorname{grad}} P_a.$$

donne

$$\vec{v}_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_0 \rho_0} f(c_0 t - \vec{n} \cdot \vec{r}) \vec{n}$$

36. En repartant notamment de l'équation d'Euler linéarisée trouvée à la question 31, établir que :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho_0 v_a^2 + \frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} P_a^2 \right] = -\text{div} \vec{I} \quad (25)$$

où $\vec{I}$ est un vecteur que l'on exprimera en fonction de P_a et $\vec{v}_a$.

Réponse : On multiplie Euler linéarisée par $\vec{v}_a$:

$$\rho_0 \vec{v}_a \cdot \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = -\vec{v}_a \cdot \vec{\text{grad}} P_a = -\text{div}(P_a \vec{v}_a) + P_a \text{div} \vec{v}_a$$

En utilisant l'équation de conservation de la masse on a

$$\text{div} \vec{v}_a = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial P_a}{\partial t}$$

On trouve donc

$$\rho_0 \vec{v}_a \cdot \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = -\text{div}(P_a \vec{v}_a) - P_a \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial P_a}{\partial t}$$

En reconnaissant les dérivée temporelle de $\frac{1}{2} v_a^2$ et $\frac{1}{2} P_a^2$ on a bien l'équation avec $\vec{I} = P_a \vec{v}_a$

37. Que représente l'équation 25 dans son ensemble et donner la signification physique de chacun de ses termes.

Réponse : C'est la conservation de l'énergie avec l'énergie cinétique volumique + l'énergie potentielle élastique volumique due à la compression. $\vec{I}$ est la densité de flux, équivalent du vecteur de Poynting.

38. Dans le cas d'une onde plane se propageant dans la direction $\vec{n}$, montrer que le vecteur $\vec{I}$ s'écrit :

$$\vec{I} = c_0 \rho_0 v_a^2 \vec{n} \quad (26)$$

Réponse : On a trouvé $\vec{I} = P_a \vec{v}_a$ (Q36) avec

$$P_a(\vec{r}, t) = f(c_0 t - \vec{n} \cdot \vec{r})$$

et $\vec{v}_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_0 \rho_0} f'(c_0 t - \vec{n} \cdot \vec{r}) \vec{n}$ (Q35) d'où :

$$\vec{I} = \frac{1}{c_0 \rho_0} f^2(c_0 t - \vec{n} \cdot \vec{r}) \vec{n} = c_0 \rho_0 v_a^2 \vec{n}$$

On veut calculer les pertes d'énergie du mode fondamental de la membrane par radiation acoustique. Pour ce mode la déformation $w(x, y, t)$ de la membrane s'écrit

$$w(x, y, t) = w_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}\left(y + \frac{a}{2}\right)\right) \cos(\Omega_M t) \quad (27)$$

où w_0 est l'amplitude du déplacement de la membrane en son centre.

39. A quelle condition sur la fréquence et sur les dimensions de la membrane, peut-on négliger les effets de diffraction sur l'onde acoustique émise ? Montrer par une application numérique que le mode fondamental de la membrane décrite dans le document scientifique 3 (avec $a = 1 \text{ mm}$ et $\Omega_M = 2\pi \times 400 \text{ kHz}$), placée dans l'air à pression et température ambiantes, est à la limite de cette condition.

Réponse : Il faut que la longueur d'onde acoustique soit petite devant les dimensions latérales du mode. En prenant une vitesse de l'onde de 340 ms^{-1} , la longueur d'onde vaut environ 0.8 mm , comparable à la taille de la membrane. On n'est donc pas vraiment dans les conditions.

On ne tiendra pas compte des effets de diffraction et on considérera que chaque élément de surface de la membrane rayonne une onde plane.

40. En écrivant la condition aux limites de l'onde au niveau de la surface de la membrane et en intégrant sur les deux faces de la membrane, écrire la puissance acoustique moyenne rayonnée par le mode fondamental en fonction de w_0 , Ω_M , c_0 , ρ_0 , et a .

Réponse : La condition aux limites est que la vitesse normale de l'air est égale à la vitesse de la surface de la membrane. Comme on ne considère que des ondes normales, $v_a = v_m$. Le mouvement du mode fondamental est

$$w(x, y, t) = x_m \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{a}y\right) \cos(\Omega_M t)$$

La puissance rayonnée par une face est

$$\langle P_{\text{face}} \rangle = \left\langle \int_S \vec{I} \cdot \vec{n} dS \right\rangle = \int_S c_0 \rho_0 \langle \dot{w}^2(x, y, t) \rangle dS = \frac{1}{8} c_0 \rho_0 x_m^2 \Omega_M^2 a^2$$

Le $1/8$ vient de $\frac{1}{2}$ pour l'intégrale en x , $\frac{1}{2}$ pour celle en y et $\frac{1}{2}$ pour la valeur moyenne temporelle.

La puissance totale pour les deux faces est $P_{\text{acc}} = \frac{1}{4} c_0 \rho_0 x_m^2 \Omega_M^2 a^2$

Le facteur de qualité Q d'un oscillateur harmonique faiblement amorti est défini par

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} \quad (28)$$

où E est l'énergie totale de l'oscillateur (égale à l'énergie cinétique maximale sur une période par exemple) et ΔE l'énergie perdue lors d'une oscillation.

41. En considérant que l'amortissement de la membrane ne provient que de la puissance perdue par rayonnement acoustique, exprimer le facteur de qualité du mode fondamental dans l'air en fonction de Ω_M , h , ρ , c_0 et ρ_0 .

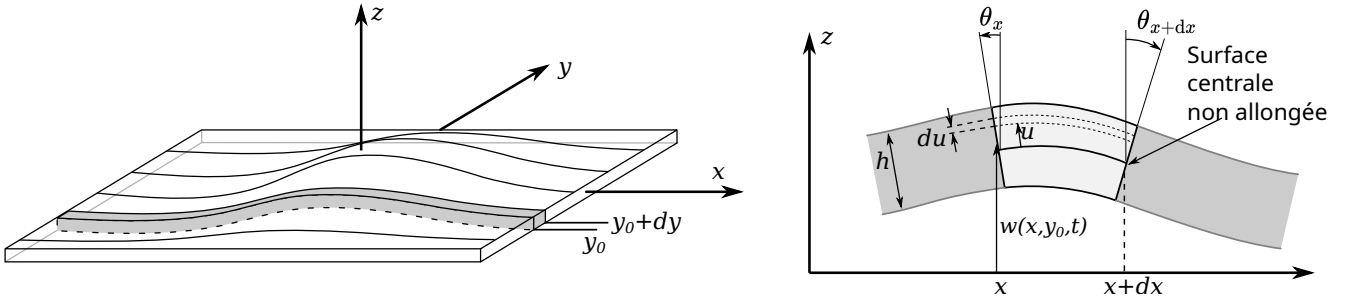


Figure 5: À gauche : En grisé, bande de membrane en $y = y_0$ de largeur dy . À droite la même bande vue en coupe, où un élément infinitésimal de longueur dx est mis en évidence.

Réponse : $E = \frac{1}{2}m\Omega_M^2 x_m^2$ (énergie cinétique max) avec $m = \frac{1}{4}\rho_m h a^2$. De plus $\Delta E = P_{acc} \times 2\pi/\Omega_M$ D'où

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\Omega_M h \rho}{c_0 \rho_0}$$

42. Montrer qu'à pression ambiante le facteur de qualité du mode fondamental n'excède pas quelques unités.

Réponse : AN : $Q = \frac{2\pi \times 400 \times 100 \times 10^{-9} \times 3200}{340 \times 1,2} = 1$.

Pertes mécaniques intrinsèques

Lors de la flexion de la membrane, une partie de l'énergie élastique est dissipée dans le matériau par des mécanismes internes. Pour estimer ces pertes, il est nécessaire d'étudier les allongements et compressions des différentes couches dans l'épaisseur de la membrane.

On considère que l'allongement du matériau dans une direction n'entraîne pas de compression dans les directions perpendiculaires (ce qui revient à annuler le module de Poisson ν du matériau). Ainsi, les déformations dans les directions x et y seront traitées de manière indépendante.

Comme on souhaite évaluer uniquement l'énergie due à la flexion, on peut considérer que la tension σ est nulle. La surface centrale est alors non tendue et non allongée au premier ordre.

Dans un premier temps, on ne considère qu'une bande de membrane à l'ordonnée $y = y_0$ de largeur dy (bande grisée sur le schéma de gauche de la Figure 5).

Cette bande est décomposée en une superposition de couches horizontales d'épaisseur du repérées par la coordonnée u variant de $-h/2$ à $h/2$. L'élément de volume $dx dy du$ dans la membrane possède, lorsqu'il est étiré dans la direction x , une raideur effective κ telle que :

$$\kappa = \frac{1}{dx} Y dy du \quad (29)$$

où la constante Y (positive) est le module d'élasticité du matériau, appelé encore module d'Young.

43. Justifier la dépendance de la raideur κ en dx , dy et du , en particulier pourquoi les quantités dy et du apparaissent au numérateur et dx au dénominateur. On pourra s'appuyer sur une analogie avec des ressorts placés en parallèle ou en série en considérant par exemple un élément de volume deux fois plus long ou deux fois plus large ou épais.

Réponse : Si un élément $dx dy du$ est équivalent à un ressort, un élément 2 fois plus épais ($du \times 2$) est équivalent à 2 ressorts en parallèle et est donc 2 fois plus raide. idem pour un élément 2 fois plus large $dy \times 2$.

Un élément 2 fois plus long dx est équivalent à 2 ressorts en série et est donc 2 fois moins raide.

On note θ_x l'angle que fait la normale à la surface centrale de la membrane en x avec l'axe vertical (Figure 5 à droite). Cet angle est directement relié au déplacement de la w de la membrane :

$$\theta_x(t) = \frac{\partial w}{\partial x}(x, y_0, t) \quad (30)$$

On rappelle que la surface centrale de la membrane ($u = 0$) n'est pas étirée. Dans le cas particulier de l'élément représenté sur la Figure 5 à droite, l'élément $dx dy du$ est allongé pour des u positifs et comprimé pour des u négatifs.

44. Exprimer l'énergie potentielle élastique de l'élément de membrane $dx dy du$ en fonction de u , Y , dx , dy , du , et $d\theta_x = \theta_{x+dx} - \theta_x$.

Réponse : En $u = 0$ il n'y a pas d'allongement en u l'allongement est $ud\theta_x$. L'énergie potentielle élastique est donc

$$d^3 E_{el} = \frac{1}{2} \kappa (ud\theta_x)^2 = \frac{1}{2dx} Y dy du (ud\theta_x)^2$$

45. Exprimer l'angle $d\theta_x$ grâce notamment au déplacement w , puis en intégrant sur l'épaisseur de la membrane, exprimer l'énergie potentielle élastique de l'élément de volume $h dx dy$ de la membrane (élément mis en évidence sur la figure 5 à droite) en fonction de Y , h , dx , dy , et w .

Réponse : L'angle en x est directement relié à la dérivée de w :

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$$

donc

$$d\theta_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

$$\begin{aligned} d^2 E_{el} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2dx} Y dy du (u d\theta_x)^2 = \frac{1}{2dx} Y dy \theta_x^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u^2 du = \frac{1}{24dx} Y dy \theta_x^2 h^3 \\ &= \frac{1}{24} h^3 Y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy \end{aligned}$$

46. En considérant désormais les déformations dans les directions x et y de la membrane montrer que l'énergie potentielle élastique totale due à la flexion se met sous la forme :

$$E_{\text{flex}} = D \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \quad (31)$$

où D est une constante que l'on exprimera en fonction de Y et de h .

Réponse : On a supposé que les déformations en x et y étaient indépendantes. Il ne reste plus qu'à les sommer et à intégrer sur la surface de la membrane. Sans difficulté on trouve alors $D = \frac{Yh^3}{24}$.

Le taux d'énergie perdue ne dépend que des propriétés du matériau et se modélise en supposant qu'à chaque période d'oscillation une fraction Φ de l'énergie moyenne de flexion $\langle E_{\text{flex}} \rangle$ est dissipée dans le matériau. Φ est un nombre sans dimension appelé angle de perte généralement petit devant 1.

47. En utilisant la définition du facteur de qualité (équation 28), la masse effective des modes de vibration (question 27) et leur fréquence de résonance (question 26), montrer que le facteur de qualité du mode n, m limité par les pertes intrinsèques du matériau vaut :

$$Q_{\text{int}} = \frac{48}{\pi} \frac{a^2 \sigma}{h^2 Y \Phi} \frac{n^2 + m^2}{n^4 + m^4} \quad (32)$$

Réponse : Par définition : $Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$ donc $Q_{\text{int}} = 2\pi \frac{E}{\Phi E_{\text{flex}}}$ avec E l'énergie cinétique max sur une période : $E = K = \frac{1}{2} M_{mn} \Omega_M^2 x_0^2$. avec $M_{mn} = \frac{1}{4} \rho h a^2$

$$K = \frac{1}{8} \rho h a^2 \Omega_M^2 x_0^2$$

Avec $\Omega_M = 2\pi \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\sigma(n^2 + m^2)}{\rho}}$
donc

$$K = \frac{\pi^2}{8} \sigma h (n^2 + m^2) x_0^2$$

D'autre part avec $w = x_0 \sin() \sin() \sin(\Omega_M t)$

$$E_{\text{flex}} = B \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \times \sin^2(\Omega_M t)$$

$$\begin{aligned}
&= Bx_0^2 \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \right] \sin^2(\cdot) \sin^2(\cdot) dx dy \times \sin^2(\Omega_M t) \\
&= Bx_0^2 \frac{a^2}{4} \frac{\pi^4}{a^4} (n^4 + m^4) \times \sin^2(\Omega_M t) = x_0^2 \frac{Yh^3}{24} \frac{\pi^4}{4a^2} (n^4 + m^4) \times \sin^2(\Omega_M t) \\
&E_{flex} = x_0^2 \frac{Yh^3}{96} \frac{\pi^4}{a^2} (n^4 + m^4) \sin^2(\Omega_M t)
\end{aligned}$$

En moyennant sur une période :

$$\langle E_{flex} \rangle = x_0^2 \frac{Yh^3}{192} \frac{\pi^4}{a^2} (n^4 + m^4)$$

$$Q_{int} = 2\pi \frac{K}{\Phi < E_{flex} >} = 2\pi \frac{192}{8} \frac{a^2}{\Phi Y h^3 \pi^4 (n^4 + m^4)} \times \pi^2 \sigma h (n^2 + m^2)$$

48. Pour une membrane fabriquée dans un matériau donné (Module d'Young Y et angle de perte Φ fixés), quel design (géométrie, tension) est le plus favorable pour obtenir un facteur de qualité important ?

Réponse : Il faut une tension la plus grande possible et un rapport d'aspect $\frac{a}{h}$ le plus grand possible c'est à dire une membrane la plus fine et la plus large. Enfin le meilleur mode sera le fondamental.

4 Une membrane très réfléchissante

Dans cette partie, on étudie la possibilité de rendre une membrane fine, constituée d'un matériau diélectrique, extrêmement réfléchissante pour certaines longueurs d'onde de la lumière. Il faut pour cela considérer le champ électromagnétique à l'intérieur de la membrane ainsi que les réflexions et transmissions de ce champ aux deux interfaces de la membrane.

Interface diélectrique

Dans le matériau diélectrique que l'on considère, le vecteur polarisation électrique $\vec{P}$ est relié au champ électrique $\vec{E}$ par la relation :

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (33)$$

49. Nommer la constante χ_e et donner son unité.

Réponse : Susceptibilité électrique, sans unité

50. Quelles hypothèses doit-on faire sur le matériau diélectrique pour que la relation 33 soit valide ?

Réponse : Matériau linéaire (P proportionnel à E), homogène (ne dépend pas de $\vec{r}$), isotrope (χ_e est un scalaire pas un tenseur), non dispersif (P ne dépend que de la valeur de E instantanée).

51. Citer deux exemples de matériaux vérifiant les hypothèses précédentes, et deux exemples de matériaux ne les vérifiant pas en indiquant quelles propriétés font défaut.

Réponse : Le verre, les gaz, le plexyglass
Le quartz les plastiques sous contraintes (biréfringent donc anisotropes), les cristaux non linéaires comme le KTP, les plasmas proches de la fréquence plasma sont très dispersifs.

Le matériau constituant la membrane est un isolant non chargé et non magnétique.

52. Écrire les quatre équations de Maxwell dans le matériau, liant les champs électrique $\vec{E}$, magnétique $\vec{B}$ et induction électrique $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Réponse :

$$\text{div } B = 0, \text{div } D = 0, \text{rot } E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \text{rot } B - \mu_0 \frac{\partial D}{\partial t} = 0$$

53. A partir des équations précédentes, écrire l'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$ d'une part et par $\vec{B}$ d'autre part.

Réponse : $(\Delta + \mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi_e) \frac{\partial^2}{\partial t^2}) E, B = 0$

54. On considère une solution sous forme d'onde plane progressive harmonique de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (34)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (35)$$

Donner la relation de dispersion liant $|\vec{k}|$ et ω , ainsi que la relation reliant les amplitudes $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$.

Réponse : $k^2 = \mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi_e) \omega^2$ et $\vec{B}_0 = \vec{k} \times \vec{E}_0 / \omega$

55. Pourquoi parle-t-on d'onde transverse ?

Réponse : $\text{div } B = 0$, $\text{div } D = 0$ donc $\text{div } E = 0$, et donc $\vec{k} \cdot E = 0$ et $\vec{k} \cdot B = 0$ les champs E et B sont perpendiculaires à la direction de propagation.

On considère désormais ce qui se passe à l'interface entre deux milieux diélectriques caractérisés par des coefficients χ_{e1} et χ_{e2} . Les deux milieux sont isolants et non magnétiques (pas de courants surfaciques libres ou liés au niveau de l'interface) et non chargés (pas de charges surfaciques libres au niveau de l'interface).

56. Quelles sont les composantes des champs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{D}$ qui sont continues au passage de l'interface ? Donner alors les relations de continuité sur les composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. On introduira les constantes diélectriques relatives sans dimension ε_1 et ε_2 des milieux 1 et 2, constantes que l'on définira.

Réponse : B est complètement continu car non magnétique, D normal et E tangentiel sont continus.

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \vec{B}_2 \\ \varepsilon_1 E_{1N} &= \varepsilon_2 E_{2N} \\ E_{1T} &= E_{2T}\end{aligned}$$

où $\varepsilon_1 = 1 + \chi_{1e}$ et $\varepsilon_2 = 1 + \chi_{2e}$

On s'intéresse à une onde incidente venant du milieu 1 en incidence normale d'amplitude E_i et on cherche à déterminer les amplitudes E_r de l'onde réfléchie et E_t de l'onde transmise.

57. En utilisant les relations de continuité trouvées à la question précédente, calculer les coefficients de transmission t et de réflexion r en amplitude pour le champ électrique. On les exprimera en fonction des indices optiques n_1 et n_2 des milieux 1 et 2 que l'on définira.

Réponse : Les champs E et B sont tous transverses :

$$\begin{aligned}\vec{E}_i + \vec{E}_r &= \vec{E}_t \\ \vec{B}_i + \vec{B}_r &= \vec{B}_t\end{aligned}$$

La dernière équation donne

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 \times \vec{E}_i - \vec{k}_1 \times \vec{E}_r &= \vec{k}_2 \times \vec{E}_t \\ \sqrt{\varepsilon_1}(E_i - E_r) &= \sqrt{\varepsilon_2}E_t\end{aligned}$$

D'où en posant $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ et $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$

$$\begin{aligned} t = \frac{E_t}{E_i} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \\ r = \frac{E_r}{E_i} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \end{aligned}$$

58. Quelle relation entre r , t et les indices optiques n_1 et n_2 traduit la conservation de l'énergie électromagnétique ? Montrer que les expressions de r et t trouvées à la question précédente satisfont cette relation.

Réponse :

$$|r|^2 + \frac{n_2}{n_1} |t|^2 = 1$$

car la puissance est donnée par le vecteur de poynting $\propto E \times B$:

$$\begin{aligned} |E_i \times B_i| &= |E_t \times B_t| + |E_r \times B_r| \\ k_1 |E_i|^2 &= k_2 |t E_i|^2 + k_1 |r E_i|^2 \\ n_1 = n_2 |t|^2 + n_1 |r|^2 &\implies \frac{n_2}{n_1} |t|^2 + |r|^2 = 1 \end{aligned}$$

Membrane simple et membrane à cristaux photoniques

Dans ce qui suit, on s'intéresse tout d'abord aux propriétés de réflexion d'une membrane simple en fonction de son épaisseur, puis on étudie la possibilité d'augmenter le coefficient de réflexion grâce à la gravure d'un réseau de trous dans la membrane, appelé cristal photonique.

On considère une membrane fine d'épaisseur h dont les dimensions latérales sont supposées infinies. L'indice optique de la membrane est noté $n_m > 1$. De part et d'autre de cette membrane, le milieu est le vide. Au niveau d'une interface, le coefficient de transmission en amplitude du vide vers le diélectrique est noté t , celui du diélectrique vers le vide t' , le coefficient de réflexion en amplitude vide vers vide est noté r et celui diélectrique vers diélectrique vaut $-r$. Les résultats des questions précédentes montrent que les coefficients r , t et t' sont réels et vérifient :

$$-1 < r < 0 \quad (36)$$

$$0 < t < 1 \quad (37)$$

$$tt' + r^2 = 1 \quad (38)$$

On pourra utiliser ces propriétés sans démonstration dans la suite.

Une onde plane progressive harmonique de la forme :

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = E_i \exp(i\omega t - ikz) \vec{u}_x \quad (39)$$

d'amplitude E_i , polarisée selon l'axe x , venant des z négatifs et se propageant vers les z croissants, est envoyée sur la membrane dans la zone 1 (voir Figure 6).

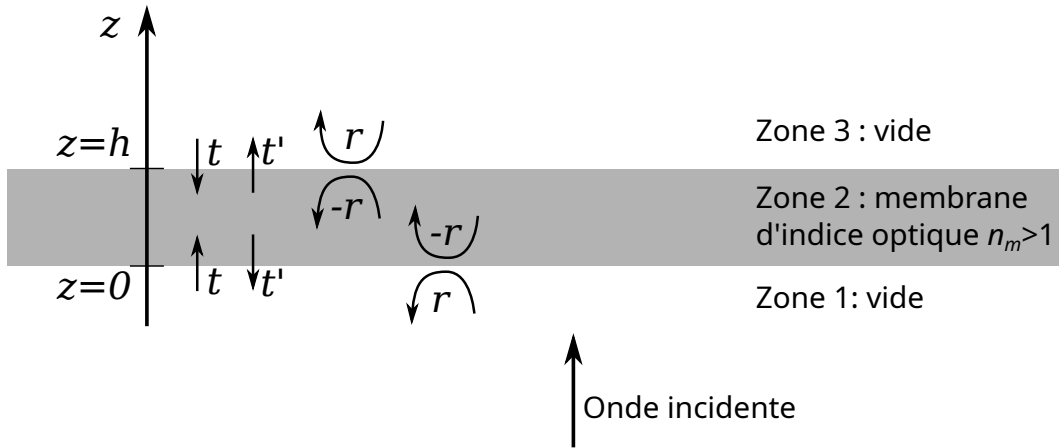


Figure 6: Membrane diélectrique vue de côté (zone 2) entourée de vide (zone 1 et 3).

On note E^+ (respectivement E^-) l'amplitude du champ électrique dans la zone 2 se propageant selon les z croissants (respectivement décroissants), E_r l'amplitude du champ réfléchi par la membrane dans la zone 1 et E_t celle du champ transmis dans la zone 3.

59. En écrivant les relations de continuité au niveau des interfaces en $z = 0$ et $z = h$ ainsi que la propagation des champs dans l'épaisseur de la membrane, trouver le coefficient de réflexion en amplitude $r_m = E_r/E_i$ de la membrane et son coefficient de transmission en amplitude $t_m = E_t/E_i$. On exprimera ces coefficients en fonction de r , k , h et n_m .

Réponse :

On a les relations : En $z = 0$:

$$E_r = rE_i + t'E^-$$

$$E^+ = tE_i - rE^-$$

En $z = h$:

$$E_te^{-ikh} = t'E^+e^{-in_mkh}$$

$$E^-e^{in_mkh} = -rE^+e^{-in_mkh}$$

Donc

$$E^+ = -\frac{1}{r}e^{2in_mkh}E^-$$

$$-\frac{1}{r}e^{2in_mkh}E^- = tE_i - rE^-$$

$$E^- = -\frac{rt}{e^{2in_mkh} - r^2}E_i$$

En éliminant les champs E^+ et E^- et en utilisant que $r^2 + tt' = 1$ on trouve :

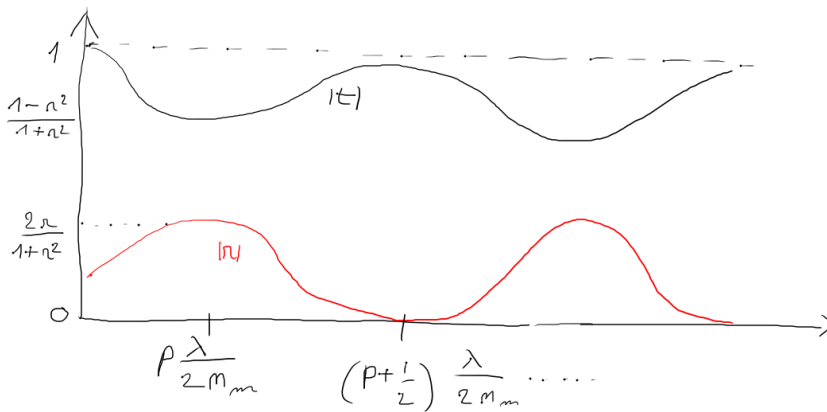
$$r_m = \frac{E_r}{E_i} = r \left(\frac{1 - e^{-2in_m kh}}{1 - r^2 e^{-2in_m kh}} \right)$$

$$t_m = \frac{E_t}{E_i} = tt' \frac{e^{-i(n_m-1)kh}}{1 - r^2 e^{-2in_m kh}}$$

$$= \frac{1 - r^2}{1 - r^2 e^{-2in_m kh}} e^{-i(n_m-1)kh}$$

60. En déduire que, lorsque l'on fait varier l'épaisseur de la membrane, le module $|t_m|$ du coefficient de transmission et le module $|r_m|$ du coefficient de réflexion de la membrane présentent des maxima et des minima que l'on exprimera en fonction du coefficient r . Exprimer en fonction de la longueur d'onde λ et n_m les valeurs de h pour lesquelles ces maxima et minima sont atteints. Tracer l'allure du module de r_m et t_m .

Réponse : $|r_m|$ varie entre 0 et $\frac{2r}{1+r^2}$; $|t_m|$ varie entre $\frac{1-r^2}{1+r^2}$ et 1 pour des valeurs de $h = p \frac{\lambda}{2n_m}$ (r min) et $h = \frac{\lambda}{4n_m} + p \frac{\lambda}{2n_m}$ (r max)



Dans le cas d'une membrane en nitrure de silicium d'indice $n_m = 2$, le coefficient de réflexion total de la membrane $|r_m|$ est ainsi limité à 0,6 ce qui est, dans la plupart des expériences d'optomécanique, très insuffisant. Pour améliorer la réflectivité de la membrane, on a recours à un procédé de gravure qui transforme la membrane en un réseau appelé *cristal photonique*.

On étudie dans la suite le cas d'une membrane dans laquelle ont été percées, sur toute son épaisseur, de longues tranchées orientées selon l'axe y et régulièrement espacées selon l'axe x (voir Figure 7). Le problème reste donc invariant selon l'axe y et devient périodique selon x . La périodicité spatiale sera notée Λ .

Pour obtenir une réflectivité quasiment parfaite de la membrane, le principe est de créer par diffraction des modes guidés se propageant selon $+x$ et $-x$ à l'intérieur de la membrane. En utilisant une interférence destructive entre ces modes et l'onde transmise, on peut obtenir une situation où toute l'énergie est réfléchiée par la membrane.

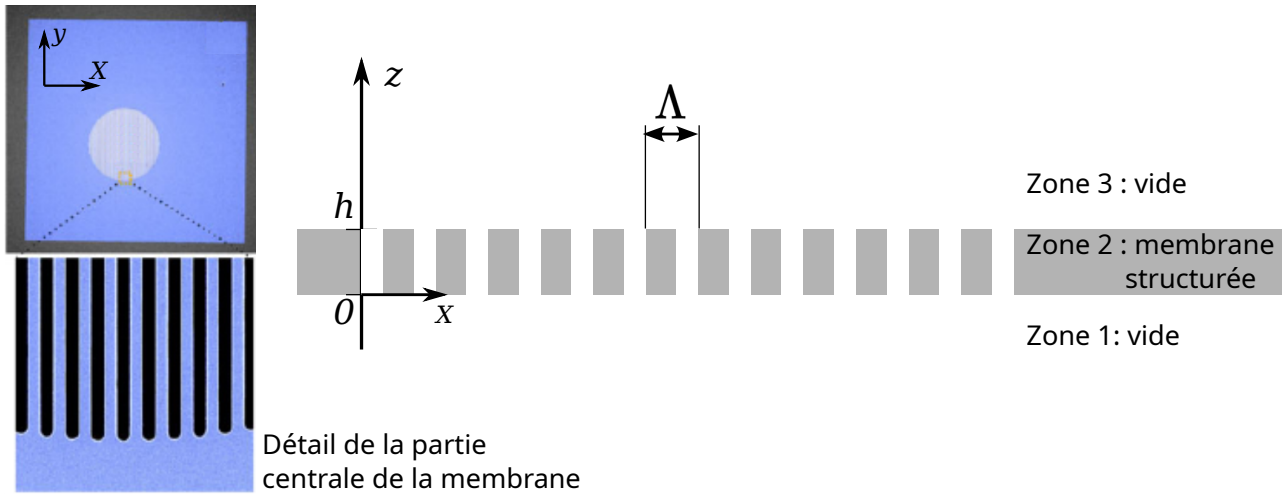
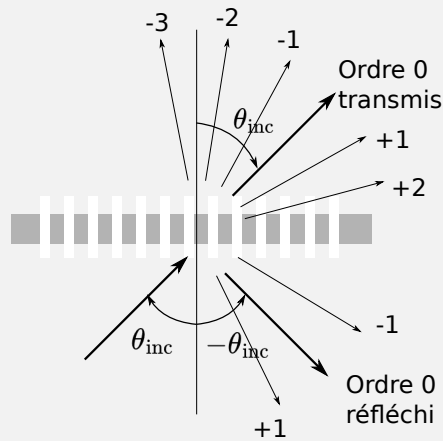


Figure 7: A gauche : Image au microscope d'une membrane carrée vue de haut avec en son centre un cristal photonique. A droite : schéma de la membrane vue sur la tranche.

Il faut tout d'abord s'assurer que l'énergie apportée par l'onde incidente ne soit pas perdue dans des modes diffractés d'ordre non nul dans les zones 1 et 3 à l'extérieur de la membrane.

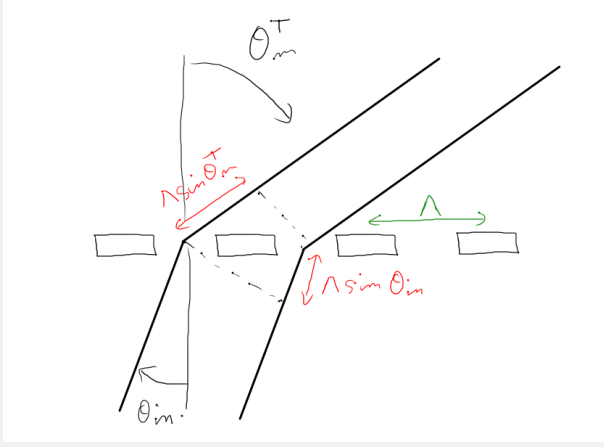
61. On considère que l'onde incidente arrive sur la membrane avec un angle θ_{inc} orienté par rapport à l'axe Oz . Faire un schéma représentant le faisceau incident et les faisceaux diffractés dans les différents ordres m réfléchis et transmis par la membrane.

Réponse :



62. En écrivant la différence de marche entre les rayons diffractés par deux fentes consécutives, retrouver les expressions des angles θ_m^R et θ_m^T des faisceaux diffractés dans l'ordre m réfléchis (zone 1) et transmis (zone 3) par la membrane en fonction de λ , Λ , m et θ_{inc} .

Réponse : il faut que la différence de trajet soit un multiple de λ



$$\sin(\theta_m^T) = \sin(\theta_{inc}) + m \frac{\lambda}{\Lambda}$$

$$\sin(\theta_m^R) = \sin(-\theta_{inc}) + m \frac{\lambda}{\Lambda}$$

On note η le taux de remplissage qui vaut 1 lorsque la membrane est pleine (sans tranchées) et tend vers 0 pour une membrane complètement creuse (voir Figure 8). Les ondes se propageant dans la zone 2 voient donc un indice optique moyen $n_{eff} = 1 + \eta(n_m - 1)$.



Figure 8: Membrane à cristal photonique avec un taux de remplissage η proche de 0 à gauche, égale à 0,5 au milieu et proche de 1 à droite.

- 63.** Dans le cas d'une onde arrivant en incidence normale $\theta_{inc} = 0$, donner les conditions sur λ , Λ et n_{eff} pour n'avoir aucun ordre diffracté autre que l'ordre 0 dans les zones 1 et 3 et qu'il y ait au moins un ordre non nul diffracté dans la membrane (zone 2).

Réponse : $\Lambda < \lambda < \Lambda n_{eff}$

On se place désormais dans le cadre de la condition de la question précédente en supposant que dans la membrane, seul un mode guidé existe. Sans perte de généralité, on ne s'intéresse qu'à une seule polarisation du champ qui sera décrit par des quantités scalaires. L'amplitude du champ du mode guidé dans la zone 2 et celles des champs incident, réfléchi et transmis dans les zones 1 et 3 sont notées respectivement :

$$a(t) = Ae^{i\omega t} \quad (40)$$

$$e_i(t) = E_i e^{i\omega t} \quad (41)$$

$$e_r(t) = E_r e^{i\omega t} \quad (42)$$

$$e_t(t) = E_t e^{i\omega t} \quad (43)$$

Concernant le mode guidé, l'essentiel de la physique du problème est décrit par l'équation d'évolution temporelle de a :

$$\frac{da}{dt} = (i\omega_0 - \gamma)a + \sqrt{\gamma}e_i \quad (44)$$

où ω_0 est la pulsation de résonance du mode guidé et γ une constante réelle qui décrit le couplage à l'onde incidente.

64. Donner la relation liant A et E_i .

Réponse : On trouve sans difficulté:

$$A = \frac{\sqrt{\gamma}}{i(\omega - \omega_0) + \gamma} E_i$$

Grâce aux coefficients de réflexion r_m et de transmission t_m de la membrane, on peut écrire :

$$E_r = r_m E_i + e^{i\phi} \sqrt{\gamma} A \quad (45)$$

$$E_t = t_m E_i + e^{i\phi} \sqrt{\gamma} A \quad (46)$$

où ϕ représente la phase du couplage.

La résonance du mode guidé étant très fine, on peut supposer qu'au voisinage d'une résonance, les coefficients r_m et t_m ainsi que ϕ sont constants.

65. Écrire les coefficients de réflexion r_c et transmission t_c de la membrane à cristal photonique en fonction de r_m , t_m , ϕ , γ , ω et ω_0 .

Réponse : Là aussi le calcul ne présente pas de difficultés

$$r_c = \frac{E_r}{E_i} = r_m + e^{i\phi} \frac{\gamma}{i(\omega - \omega_0) + \gamma}$$

$$t_c = \frac{E_t}{E_i} = t_m + e^{i\phi} \frac{\gamma}{i(\omega - \omega_0) + \gamma}$$

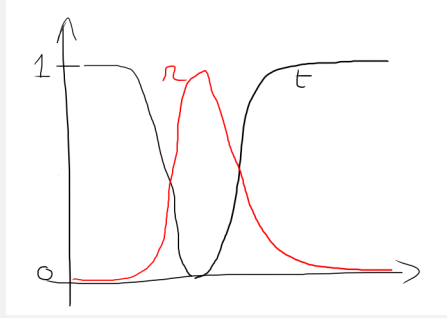
On se place dans le cas particulier où le coefficient t_m vaut 1 et $r_m = 0$.

66. En utilisant la conservation de l'énergie montrer que le coefficient $e^{i\phi}$ vaut nécessairement -1 . Sur le même graphe, tracer l'allure des modules des coefficients r_c et t_c en fonction de ω . On se placera dans le cas où $\gamma \ll \omega_0$.

Réponse : On doit avoir $|r_c|^2 + |t_c|^2 = 1$ quelque soit ω en particulier $\omega = \omega_0$ donc :

$$|r_c|^2 + |t_c|^2 = 1 = |r_m + e^{i\phi}|^2 + |t_m + e^{i\phi}|^2$$

avec $r_m = 0$ et $t_m = 1$, il faut nécessairement que $e^{i\phi} = -1$.



On se place maintenant dans la situation inverse où le coefficient r_m est maximal égal à 0,6 et t_m égal à 0,8 i.

Dans ce cas $e^{i\phi} \neq -1$ et les trajectoires de r_c et t_c dans le plan complexe sont représentées sur la Figure 9. Lorsque ω varie de $-\infty$ à $+\infty$ les coefficients r_c et t_c décrivent un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ parcouru dans le sens anti-trigonométrique partant respectivement de r_m et t_m et y revenant.

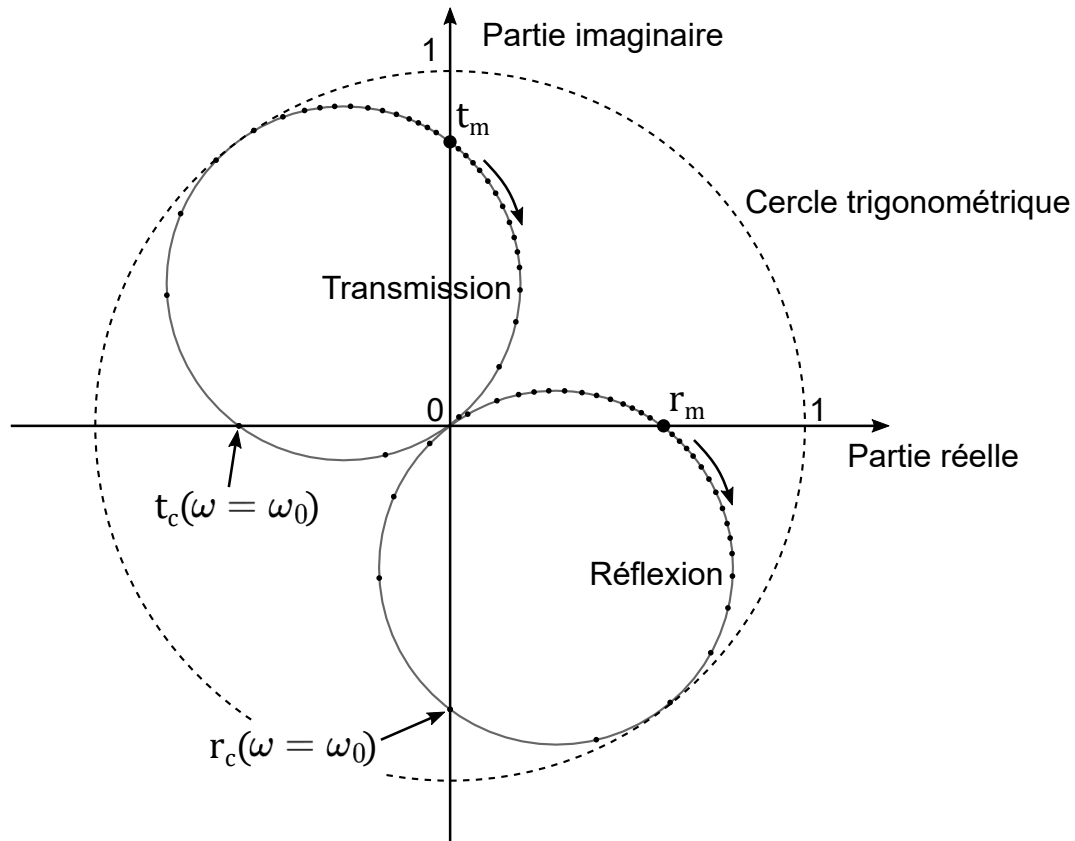
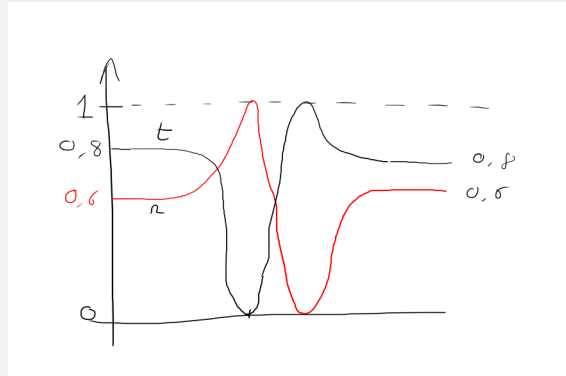


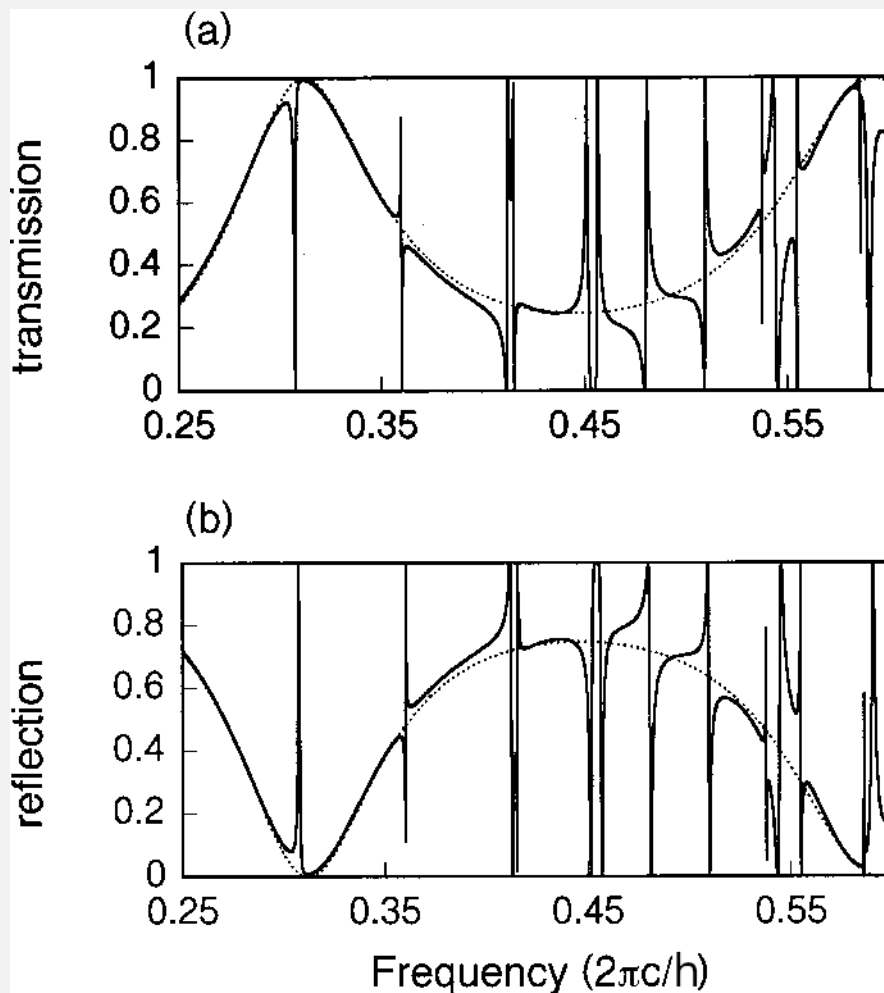
Figure 9: Évolution des coefficients de transmission t_c et réflexion r_c dans le plan complexe en fonction de ω . Les points sur les trajectoires circulaires sont atteints pour des valeurs de ω régulièrement espacées d'un écart $\omega_0/100$.

- 67.** En utilisant la figure 9 tracer sur le même graphe l'allure de $|r_c|$ et $|t_c|$ lorsque ω varie autour de la résonance ω_0 .

Réponse :



Document scientifique 4 : Extrait de “Analysis of guided resonances in photonic crystal slabs”



Module des coefficients de transmission et de réflexion d’une membrane à cristaux photoniques de fort indice $n_m = 4$. La ligne en pointillé représente ces mêmes coefficients pour une membrane non structurée, d’épaisseur h .

68. À partir des résultats obtenus dans cette partie expliquer l’allure des coefficients de trans-

mission et de réflexion présentés dans le document scientifique 4, et conclure sur la possibilité d'obtenir une membrane hautement réfléchissante.

Réponse : Tout d'abord on reconnaît sur la ligne en pointillé la dépendance lente dues à l'effet Fabry Péroth entre les faces de la membrane. Se superpose à cet effet le couplage avec les multiples résonances qui donne un pic étroit lorsque $r = 0$ soit une fonction qui monte à 1 et descend à 0 très rapidement.

On trouve donc des fréquences où la réflexion monte à 1 exactement (en module). La zone en fréquence où cela se produit est extrêmement étroite.

5 Traitement quantique de la membrane

Cette cinquième partie ne fait pas partie du sujet original. Elle est donnée ici à titre d'exercice tout en complétant le sujet.

Cette partie traite de l'aspect quantique de la membrane avec la détermination de la température nécessaire pour observer ses fluctuations quantiques.

Si l'on ne considère qu'un seul mode mécanique de la membrane, celle-ci peut être décrite au niveau quantique comme un oscillateur hamonique de masse M et de pulsation de résonance Ω_M . Dans la suite, les opérateurs de position et d'impulsion seront notés $\hat{x}$ et $\hat{p}$.

On appelle $\hat{b}$ l'opérateur d'annihilation défini par :

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{M\Omega_M}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2M\hbar\Omega_M}}\hat{p} \quad (47)$$

69. Écrire l'opérateur création $\hat{b}^\dagger$ hermitique conjugué de $\hat{b}$, et montrer que la relation de commutation de $\hat{b}$ et $\hat{b}^\dagger$ est :

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \text{Id} \quad (48)$$

où Id représente l'opérateur identité. On pourra utiliser sans démonstration la relation de commutation de $\hat{x}$ et $\hat{p}$:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\text{Id} \quad (49)$$

Réponse :

$$\hat{b}^\dagger = \sqrt{\frac{m\Omega_M}{2\hbar}}\hat{x}^\dagger - i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\Omega_M}}\hat{p}^\dagger = \sqrt{\frac{m\Omega_M}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\Omega_M}}\hat{p}$$

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b} = \frac{1}{2\hbar}(-2i\hat{x}\hat{p} + 2i\hat{p}\hat{x}) = \frac{-i}{\hbar}[\hat{x}, \hat{p}] = \text{Id}$$

On n'a pas écrit les termes en $\hat{x}^2$ et $\hat{p}^2$ qui se simplifient.

Le Hamiltonien $\hat{H}$ du système s'écrit

$$\hat{H} = \hbar\Omega_M \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \text{Id} \right) \quad (50)$$

On rappelle que les états propres de ce hamiltonien sont les états nombre $|n\rangle$ associés aux énergies propres $E_n = \hbar\Omega_M(n + \frac{1}{2})$. Ces vecteurs forment une base orthonormée. L'action des opérateurs $\hat{b}$ et $\hat{b}^\dagger$ sur les vecteurs $|n\rangle$ est :

$$\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{si } n \neq 0 \quad (51)$$

$$\hat{b}|0\rangle = \vec{0} \quad (52)$$

$$\hat{b}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (53)$$

L'action de $\hat{x}$ sur les fonctions d'onde est la multiplication par x , l'action de $\hat{p}$ est $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$.

70. En utilisant $\hat{b}|0\rangle = \vec{0}$, vérifier que la fonction d'onde de l'état fondamental est :

$$\psi_0(x) = C \exp \left(-\frac{x^2}{4x_{zpm}^2} \right) \quad (54)$$

où l'on exprimera la constante x_{zpm} en fonction de M , Ω_M et $\hbar$. On ne cherchera pas à déterminer la constante de normalisation C .

Réponse : Vérifions que $\psi_0(x)$ vérifie $\hat{b}\psi_0(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{m\Omega_M}{2\hbar}} \hat{x} + i \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\Omega_M}} \hat{p} \right) \psi_0(x) &= \sqrt{\frac{m\Omega_M}{2\hbar}} x \psi_0(x) + i \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\Omega_M}} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi_0(x) \\ &= \sqrt{\frac{m\Omega_M}{2\hbar}} x \psi_0(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m\hbar\Omega_M}} \frac{-2x}{4x_{zpm}^2} \psi_0(x) \end{aligned}$$

On obtient bien 0 si

$$\sqrt{\frac{m\Omega_M}{2\hbar}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\hbar\Omega_M}} \frac{1}{4x_{zpm}^2}$$

c'est à dire

$$x_{zpm}^2 = \frac{\hbar}{2m\Omega_M}$$

L'extension x_{zpm} représente l'amplitude des fluctuations de l'état fondamental, aussi appelée fluctuations de point zéro ou *Zero Point Motion*.

71. Quelles différences y a-t-il entre l'état de plus faible énergie dans les descriptions classique et quantique ? Quelle est l'origine de ces différences ?

Réponse : En mécanique classique l'état de plus faible énergie est la particule au repos en $x = 0$ son énergie mécanique est nulle. En mécanique quantique l'état fondamental à une énergie $\hbar\omega/2$ et la variance de x est non nulle. Cela vient de l'inégalité de Heisenberg $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq \hbar/2$.

72. Donner la valeur numérique de x_{zpm} pour une membrane de pulsation propre $\Omega_M = 2\pi \times 400 \text{ kHz}$ et de masse 80 ng .

Réponse : $5 \times 10^{-16} \text{ m}$

Lorsque le système est à l'équilibre thermique à la température T , la valeur moyenne d'une observable quantique $\hat{A}$ est donnée par :

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\text{Tr}(\hat{A}e^{-\beta\hat{H}})}{\text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}})} \quad (55)$$

où Tr désigne la trace de l'opérateur, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux et $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

73. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, montrer que cette valeur moyenne se met sous la forme :

$$\frac{1}{Z} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle n | \hat{A} | n \rangle e^{-\beta E_n} \quad (56)$$

où E_n est l'énergie de l'état $|n\rangle$ et où Z est appelée fonction de partition, que l'on exprimera en fonction de β et des énergies E_n .

On rappelle que si $\hat{B}$ est un opérateur et $|\psi\rangle$ un vecteur propre de $\hat{B}$ associé à la valeur propre b alors pour toute fonction f on a $f(\hat{B})|\psi\rangle = f(b)|\psi\rangle$.

Réponse : Dans la base des vecteurs propres $|n\rangle$ on peut écrire :

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle n | \hat{A} e^{-\beta\hat{H}} | n \rangle}{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle n | e^{-\beta\hat{H}} | n \rangle}$$

Comme $|n\rangle$ est vecteur propre de H il l'est aussi pour $e^{-\beta\hat{H}}$ avec la valeur propre $e^{-\beta E_n}$
Donc

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta E_n} \langle n | \hat{A} | n \rangle}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta E_n} \langle n | n \rangle} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta E_n} \langle n | \hat{A} | n \rangle}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta E_n}}$$

D'où $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta E_n}$

74. En exprimant $\hat{x}$ en fonction de $\hat{b}$ et $\hat{b}^\dagger$, calculer la variance $\langle \hat{x}^2 \rangle$ de l'opérateur position et la mettre sous la forme :

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{\hbar}{M\Omega_M} \left(n_T + \frac{1}{2} \right) \quad (57)$$

où n_T est le nombre moyen d'excitations thermiques dans le résonateur, donné par

$$n_T = \frac{1}{e^{\beta\hbar\Omega_M} - 1} \quad (58)$$

On rappelle les formules :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad (59)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad (60)$$

Réponse : $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega_M}}(b + b^\dagger)$

Avec $A = \hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\Omega_M}(b + b^\dagger)^2 = \frac{\hbar}{2m\Omega_M}(b^2 + b^\dagger b + b b^\dagger + b^{\dagger 2}) :$

$$\langle n | \hat{x}^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\Omega_M} (\langle n | b^\dagger b | n \rangle + \langle n | b b^\dagger | n \rangle) = \frac{\hbar}{2m\Omega_M} (\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2}) = \frac{\hbar}{2m\Omega_M} (2n+1)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta E_n} \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta E_n}} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\Omega_M(n+\frac{1}{2})} \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta\hbar\Omega_M(n+\frac{1}{2})}} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\beta\hbar\Omega_M} \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\beta\hbar\Omega_M}} \\ &= \frac{\hbar}{2m\Omega_M} \times \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\beta\hbar\Omega_M} (2n+1)}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\beta\hbar\Omega_M}} \\ &= \frac{\hbar}{2m\Omega_M} \times \frac{2 \frac{e^{-\beta\hbar\Omega_M}}{(1-e^{-\beta\hbar\Omega_M})^2} + \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\Omega_M}}}{\frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\Omega_M}}} \\ &= \frac{\hbar}{2m\Omega_M} \times 2 \frac{e^{-\beta\hbar\Omega_M}}{1-e^{-\beta\hbar\Omega_M}} + 1 = \frac{\hbar}{m\Omega_M} \left(\frac{1}{e^{\beta\hbar\Omega_M} - 1} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

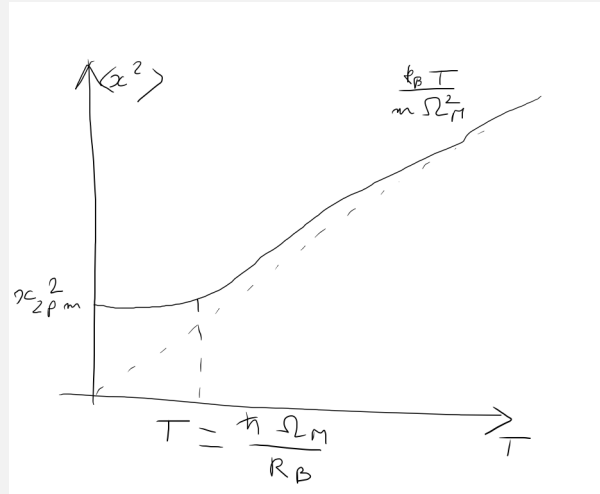
75. Tracer la variance de l'opérateur position en fonction de la température. Préciser la limite et la tangente en $T = 0$ et l'asymptote pour T grand. Montrer que l'on retrouve le comportement classique quand la température est grande devant une température que l'on précisera. Cette température limite est appelée température quantique.

Réponse : A basse température β tend vers $+\infty$, la limite de $\langle \hat{x}^2 \rangle$ est $\frac{\hbar}{2m\Omega_M} = x_{zpm}^2$ avec une tangente horizontale.

A haute température β tend vers 0 et un développement limité donne

$$\langle \hat{x}^2 \rangle \simeq \frac{1}{\beta m \Omega_M} = \frac{k_B T}{m \Omega_M}$$

On retrouve l'équipartition de l'énergie $\frac{1}{2} m \Omega_M^2 \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$. La transition se fait lorsque $k_B T \simeq \hbar \Omega_M$: $T_Q = \frac{\hbar \Omega_M}{k_B}$



76. Pour un oscillateur de pulsation $\Omega_M = 2\pi \times 400 \text{ kHz}$, donner la valeur de la température quantique à atteindre pour observer les fluctuations quantiques.

Réponse : $T = 2 \times 10^{-5} \text{ K}$ soit $20 \mu\text{K}$. Atteindre une telle température nécessite l'utilisation de refroidissement actif du type de celui présenté dans la partie 1.