

Gradients d'indice : du phénomène de mirage aux applications modernes

Proposition de corrigé
Version du 30 mars 2023

Préliminaire

Q1. Expliquer la signification de l'hypothèse de milieu *transparent* et *isotrope*, puis rappeler la définition de l'indice optique n d'un tel milieu.

Un milieu **transparent** est un milieu qui n'absorbe pas l'énergie de l'onde qui le traverse. Un milieu **isotrope** est un milieu dont les propriétés physiques (parmi lesquelles figure la vitesse de propagation de l'onde) sont indépendantes de la direction selon laquelle se propage l'onde. L'indice optique n d'un tel milieu est défini par

$$n(M) = \frac{c}{v(M)}$$

où $v(M)$ désigne la vitesse locale de propagation de l'onde dans le milieu.

I. Propagation d'une onde dans un milieu inhomogène

I.A - Marche d'un rayon lumineux à travers un milieu stratifié

Q2. Énoncer les lois de la réfraction qui permettent de construire la marche d'un rayon lumineux au sein du milieu stratifié. En déduire une relation entre les couples (n_1, α_1) et (n_i, α_i) .

Selon les lois énoncées par Descartes :

- le rayon réfracté appartient au plan d'incidence ;
- à l'interface entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 , les angles d'incidence et de réfraction, notés respectivement θ_1 et θ_2 , sont liés par $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$.

Avec le paramétrage de la figure 1 de l'énoncé, on a $\theta_i = \pi/2 - \alpha_i$ et, en raisonnant de proche en proche, on obtient

$$n_1 \cos \alpha_1 = n_i \cos \alpha_i$$

Q3. Préciser les conditions dans lesquelles il est possible d'observer un phénomène de réflexion totale à l'interface entre deux strates successives.

À l'interface entre la strate i et la strate $i+1$, on a

$$\cos \alpha_{i+1} = \frac{n_i}{n_{i+1}} \cos \alpha_i$$

Pour $n_i < n_{i+1}$, cette relation montre que $\alpha_{i+1} > \alpha_i$: le rayon réfracté se rapproche de la normale et il ne peut y avoir de réflexion totale. À l'inverse, pour $n_i > n_{i+1}$, cette relation montre que l'on doit avoir $\cos \alpha_{i+1} > \cos \alpha_i$: le rayon réfracté s'écarte de la normale. En particulier, il y a réflexion totale lorsque

$$n_i \cos \alpha_i > n_{i+1}$$

Q4. Reproduire schématiquement la FIGURE 1 sur la copie, puis représenter la marche du rayon lumineux pénétrant dans le milieu au point A_1 en formant l'angle α_1 avec l'horizontale. *Pour réaliser cette construction, on supposera que la suite $(n_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des indices optiques est strictement décroissante ; les strates sont infinies dans les directions horizontales.*

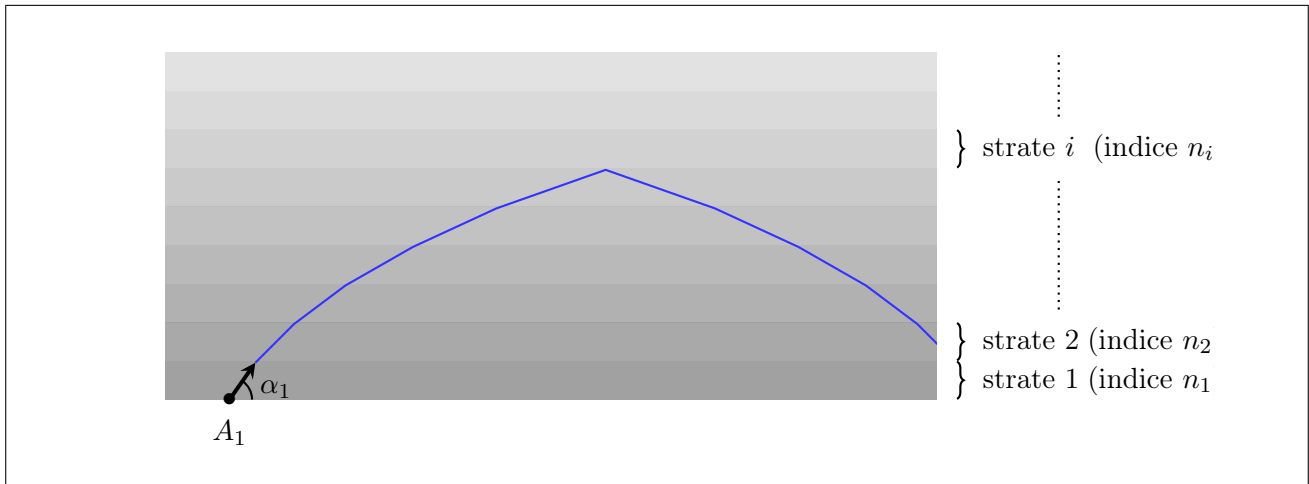


FIGURE 1 – Schéma-modèle du milieu stratifié étudié (corrigé).

I.B - Transposition dans le domaine des ondes acoustiques

Q5. En s'appuyant sur l'extrait ci-dessus et sur les résultats de la partie I.A, comparer le sens de courbure de la trajectoire des ondes sonores à celui des rayons lumineux dans un milieu inhomogène.

Dans la partie I.A, on a mis en évidence que les rayons lumineux s'incurvent vers les zones où l'indice de réfraction est le plus fort, c'est-à-dire vers les zones où la vitesse de propagation est la plus faible. Par conséquent, **le sens de courbure de la trajectoire des ondes sonores dans un milieu inhomogène est le même que celui des rayons lumineux.**

Q6. Construire, par analyse dimensionnelle, l'expression de la célérité du son dans un fluide en fonction de sa masse volumique au repos μ_0 et de sa compressibilité isentropique χ_S (définie par $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$, où P désigne la pression du fluide).

Par définition, la compressibilité isentropique χ_S d'un fluide est homogène à l'inverse d'une pression : $[\chi_S] = [P]^{-1} = \text{L} \times \text{T}^2 \times \text{M}^{-1}$. Par suite, on a $[\mu_0 \chi_S] = \text{T}^2 \times \text{L}^{-2}$. Par analyse dimensionnelle (et en admettant l'absence de facteur numérique sans dimension), l'expression de la célérité du son dans un fluide est donnée par

$$c_{\text{son}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$$

Q7. Mettre en place un modèle simple qui permet de justifier numériquement l'affirmation selon laquelle « la vitesse du son [dans l'air] croît d'environ 0,6 mètre par seconde et par degré Celsius ». *Le candidat sera libre d'introduire tout paramètre physique lui paraissant pertinent et en proposera, si cela s'avère utile, une valeur numérique.*

On peut modéliser l'air par un gaz parfait diatomique, de coefficient de Laplace γ et de masse molaire M_{air} . Dans le cadre de cette hypothèse, le caractère isentropique des transformations subies par l'air et les lois de Laplace qui s'y rapportent donnent

$$\frac{P}{\mu^\gamma} = \frac{P_0}{\mu_0^\gamma}$$

où μ_0 et P_0 désignent respectivement la masse volumique et la pression de l'air eu repos. On en déduit

$$\ln \mu = \ln \mu_0 + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{P}{P_0}$$

puis

$$\chi_S = \left(\frac{\partial \ln \mu}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{\gamma P} \simeq \frac{1}{\gamma P_0}$$

en se limitant au plus petit ordre non nul conformément à l'approximation acoustique. En exploitant l'équation d'état des gaz parfait, on obtient

$$c_{\text{son}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma \mathcal{R} T_0}{M_{\text{air}}}}$$

puis finalement

$$\boxed{\frac{\partial c_{\text{son}}}{\partial T_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma \mathcal{R}}{M_{\text{air}} T_0}}}$$

En prenant $\gamma = 7/5 = 1,4$, $M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $T_0 = 273 \text{ K}$, l'application numérique donne

$$\boxed{\frac{\partial c_{\text{son}}}{\partial T_0} = 0,61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 0,61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}}$$

ce qui confirme l'affirmation de l'article.

Q8. Réaliser un schéma illustrant la dernière phrase de l'extrait : « par les nuits froides d'hiver, une *Smart* qui traverse la campagne rugit comme une *Ferrari* ». Accompagner le schéma d'une légende explicative, constituée d'une ou deux phrases.

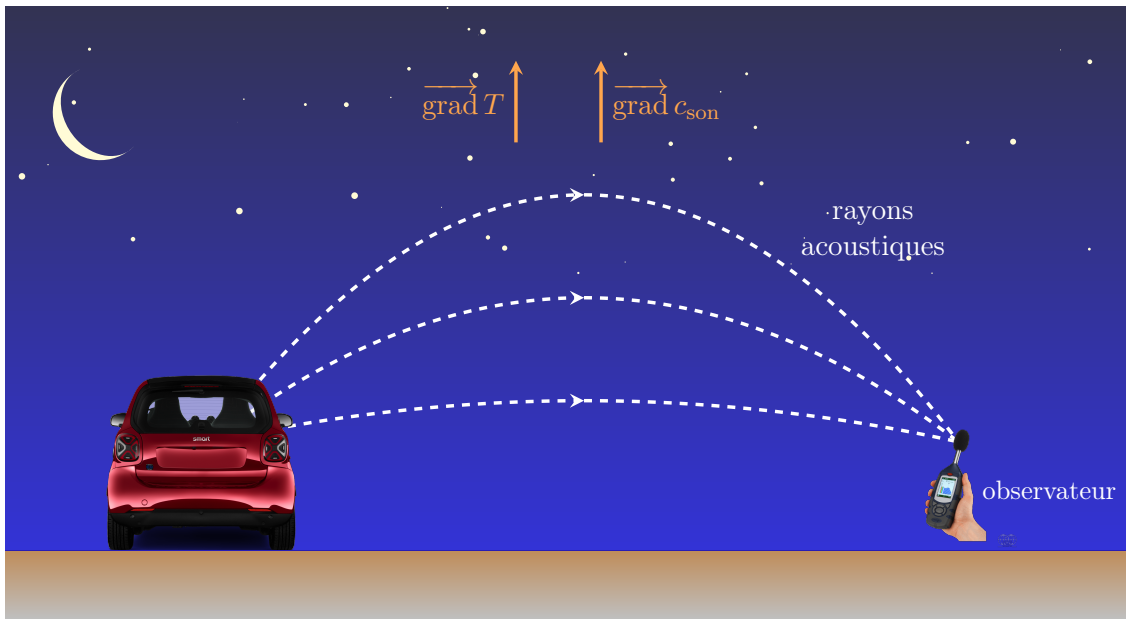


FIGURE 2 – Lors des nuits froides hivernales, un gradient de température vertical ascendant est susceptible d’apparaître dans l’air atmosphérique. Ce gradient de température s’accompagne d’un gradient de célérité du son, qui induit une courbure des rayons acoustiques vers le sol, pouvant provoquer un effet de « concentration » de la puissance acoustique perçue par un observateur.

Q9. Exploiter ces valeurs numériques pour mettre en doute la métaphore finale proposée par les auteurs de l’article : « par les nuits froides d’hiver, une *Smart* qui traverse la campagne rugit comme une *Ferrari* ! » Quel(s) autre(s) argument(s) pourrait-on invoquer pour continuer à nuancer la comparaison entre les sons produits par les deux véhicules ?

Estimons le nombre N de Smart qu’il faut réunir pour produire le même niveau d’intensité sonore qu’une seule Ferrari. En exploitant l’additivité des puissances acoustiques produites et en supposant que toutes les Smart sont identiques, on a

$$I_{\text{dB},N \text{ Smart}} = I_{\text{dB},1 \text{ Smart}} + 10 \log N$$

ce qui donne

$$N = 10^{(I_{\text{dB},1 \text{ Ferrari}} - I_{\text{dB},1 \text{ Smart}})/10} \sim 3 \cdot 10^2$$

Pour qu’une Smart rugisse comme une Ferrari, il faudrait donc que la courbure des rayons acoustiques soit suffisamment importante pour multiplier la puissance acoustique reçue par un observateur par un facteur de l’ordre de $3 \cdot 10^2$: ça semble peu raisonnable ! En outre, même à niveau d’intensité sonore identique, les spectres des sons produits par les moteurs des deux types de véhicule sont trop différents pour qu’ils puissent être confondus.

I.C - Équation eikonale

Q10. Préciser la signification physique du vecteur de Poynting $\vec{R}$ et expliquer pourquoi on s’intéresse à sa valeur moyenne temporelle dans le cas de la lumière.

Par sa direction et son sens, le vecteur de Poynting $\vec{R}$ indique la direction et le sens de déplacement de la puissance transportée par l'onde électromagnétique. **Le flux de $\vec{R}$ à travers une surface permet de quantifier la puissance électromagnétique instantanée qui traverse cette surface.**

Dans le cas des ondes lumineuses, dont les fréquences sont typiquement de l'ordre de $5 \cdot 10^{14}$ Hz, les variations temporelles de la puissance instantanée transportée sont trop rapides pour pouvoir être détectées par les récepteurs usuels, dont les temps de réponse s'étalent entre la microseconde et le dixième de seconde. **Du fait de leurs temps de réponse élevés par rapport à la période des signaux lumineux, les photorécepteurs sont sensibles à la valeur moyenne temporelle de $\vec{R}$ uniquement.**

Q11. Rappel de la définition du vecteur polarisation $\vec{P}$ d'un milieu diélectrique, puis présenter qualitativement les notions de charges et de courants de polarisation.

Le vecteur polarisation $\vec{P}$ correspond au **moment dipolaire volumique local** qu'acquiert le milieu diélectrique en présence d'un champ électromagnétique.

Les **charges de polarisation** et les **courants de polarisation** permettent de **rendre compte des variations spatiales et temporelles de la polarisation** du milieu. En effet, sous l'effet d'un champ électromagnétique, les charges « liées » constitutives du milieu se déplacent légèrement par rapport à leur position moyenne en l'absence de champ. On voit alors apparaître :

- une densité volumique de charges de polarisation ρ_p au sein du diélectrique, donnée par $\rho_p(\vec{r}, t) = -\text{div } \vec{P}(\vec{r}, t)$;
- une charge surfacique, de densité $\sigma_p(\vec{r}, t) = \vec{P}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}$ en surface du diélectrique (le vecteur $\vec{n}$ est le vecteur local unitaire, normal à la surface du diélectrique et orienté vers l'extérieur du milieu) ;
- une densité de courant volumique de polarisation $\vec{j}_p$ au sein du diélectrique, donnée par $\vec{j}_p(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(\vec{r}, t)$.

Q12. Écrire les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique vérifiant les hypothèses rappelées au début de la partie I.C. On introduira le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$ dont on donnera l'expression et la dimension.

En notant respectivement ρ_ℓ et $\vec{j}_\ell$ la densité volumique de charges « libres » et la densité de courant volumique associé au déplacement des charges libres dans le milieu, les équations de Maxwell s'écrivent de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{équation de Maxwell-Gauss :} & \text{div } \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho_\ell(\vec{r}, t) \\ \text{équation de Maxwell-Thomson :} & \text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \\ \text{équation de Maxwell-Faraday :} & \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t) \\ \text{équation de Maxwell-Ampère :} & \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}_\ell(\vec{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}(\vec{r}, t) \end{array} \right.$$

Dans ces équations, on a introduit le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$ défini par

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$\vec{D}$ est homogène à $\vec{P}$ et a donc la dimension d'une **charge par unité de surface**.

Q13. Montrer que l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ dans un tel milieu s'écrit sous l'une des deux formes suivantes, dont on peut montrer qu'elles sont équivalentes :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{n^2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n^2 \right] = \vec{0} \quad (3)$$

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \overrightarrow{\text{grad}} \left[n^2 \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{n^2} \right] = \vec{0} \quad (4)$$

Réécrivons les équations de Maxwell dans le milieu diélectrique, en supposant que celui-ci ne contient aucune charge libre et n'est le siège d'aucun courant libre, et en exploitant la relation $\vec{D} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E}$. On a

$$\begin{cases} \text{(MG)} : \quad \text{div } \vec{D} = 0 = \varepsilon_0 n^2 \text{div } \vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n^2 \\ \text{(MT)} : \quad \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{(MF)} : \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(MA)} : \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Avec ces équations, on peut exprimer $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E})$ de deux façons différentes :

- Tout d'abord, d'après le formulaire et l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) &= \overrightarrow{\text{grad}} [\text{div } \vec{E}] - \vec{\Delta} \vec{E} \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} \left[-\frac{1}{n^2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n^2 \right] - \vec{\Delta} \vec{E} \end{aligned}$$

- Puis avec les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère,

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}} \left[-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = -\frac{\partial [\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}]}{\partial t} = -\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On obtient l'équation de propagation

$$\boxed{\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{n^2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n^2 \right] = \vec{0}}$$

Q14. Par des considérations sur les ordres de grandeur mis en jeu, justifier que l'on puisse négliger le terme $\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{n^2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n^2 \right]$ devant $\vec{\Delta} \vec{E}$ dans l'équation de propagation.

En notant E^* l'ordre de grandeur typique du champ électrique dans le milieu et λ sa longueur d'onde, on peut estimer les ordres de grandeur suivants :

$$\left\| \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{n^2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n^2 \right] \right\| \sim \frac{E^*}{\ell^* \lambda} \quad \text{et} \quad \left\| \vec{\Delta} \vec{E} \right\| \sim \frac{E^*}{\lambda^2}$$

Comme $\lambda \ll \ell^*$, on a $\frac{E^*}{\lambda^2} \gg \frac{E^*}{\ell^* \lambda}$: **on peut donc bien négliger le terme** $\overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{n^2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n^2 \right]$ **devant** $\vec{\Delta} \vec{E}$ dans l'équation de propagation.

Q15. Montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde est donné par

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \overrightarrow{\text{grad}} S(\vec{r}) \wedge \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (6)$$

Réécrivons l'équation de Maxwell-Faraday avec les champs en représentation complexe

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(\vec{r}, t) = +i\omega \vec{B}(\vec{r}, t)$$

ce qui donne, d'après le formulaire d'analyse vectorielle,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{i\omega} \left[\underbrace{(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_0)}_{=\vec{0}} e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} \right) \wedge \vec{E}_0 \right] \\ &= \frac{k_0}{\omega} \overrightarrow{\text{grad}} S(\vec{r}) \wedge \vec{E}_0 e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} \end{aligned}$$

En exploitant la relation de dispersion, puis en repassant aux notations réelles on trouve bien

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \overrightarrow{\text{grad}} S(\vec{r}) \wedge \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Q16. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ de l'onde en fonction de μ_0 , c , $\|\vec{E}\|$ et S . En déduire que les rayons lumineux de l'optique géométrique correspondent aux lignes de champ de $\overrightarrow{\text{grad}} S$. Relier ce résultat au théorème de Malus-Dupin.

Le vecteur de Poynting est relié aux champs réels $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par $\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$. Avec le résultat établi dans la question précédente et la formule du double produit vectoriel, il vient

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0 c} \left[\|\vec{E}\|^2 \overrightarrow{\text{grad}} S - (\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} S) \vec{E} \right]$$

En outre, l'hypothèse $\ell^* \gg \lambda$ permet de considérer que l'équation de Maxwell-Gauss impose

$$\text{div} \vec{E} \simeq 0$$

Or, pour l'onde considérée, on a

$$\text{div} \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} \right) = ik_0 \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} S$$

En repassant aux grandeurs réelles, on obtient donc

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} S \simeq 0$$

puis

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = \frac{\|\vec{E}\|^2(\vec{r}, t)}{\mu_0 c} \overrightarrow{\text{grad}} S(\vec{r})$$

Ce dernier résultat montre que le vecteur de Poynting est localement colinéaire et de même sens que le gradient de la fonction eikonale. Par suite, **les lignes de champ de $\overrightarrow{\text{grad}} S$ s'identifient aux lignes de champ du vecteur de Poynting, c'est-à-dire aux rayons lumineux de l'optique géométrique.**

On en déduit que les rayons lumineux de l'optique géométrique sont orthogonaux aux surfaces iso- S , lesquelles correspondent aux surfaces d'onde de l'onde électromagnétique : **on retrouve le théorème de Malus-Dupin.**

Q17. Montrer que l'équation de propagation impose à la fonction eikonale de vérifier

$$\|\overrightarrow{\text{grad}} S\|^2(\vec{r}) = n^2(\vec{r}) \quad (7)$$

Compte tenu des approximations réalisées, l'équation de propagation impose au champ électrique en représentation complexe de vérifier

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Le vecteur $\vec{E}_0$ étant supposé constant, on calcule

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}_0 e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} = -k_0^2 c^2 \vec{E}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} \vec{E} &= \vec{E}_0 \Delta \left(e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} \right) \\ &= \vec{E}_0 \text{div} \left[\overrightarrow{\text{grad}} \left(e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} \right) \right] \\ &= \vec{E}_0 \text{div} \left[ik_0 \left(\overrightarrow{\text{grad}} S \right) e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} \right] \\ &= ik_0 \vec{E}_0 \left[(\Delta S) e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} \right. \\ &\quad \left. + \left(\overrightarrow{\text{grad}} S \right) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} \right) \right] \\ &= ik_0 \vec{E}_0 \left[\Delta S + ik_0 \left(\overrightarrow{\text{grad}} S \right)^2 \right] e^{i[k_0 S(\vec{r}) - \omega t]} \\ \vec{\Delta} \vec{E} &= \left[ik_0 \Delta S - k_0^2 \|\overrightarrow{\text{grad}} S\|^2 \right] \vec{E} \end{aligned}$$

En revenant à l'équation de propagation, on doit donc avoir

$$\left[\left(n^2 - \|\overrightarrow{\text{grad}} S\|^2 \right) k_0 + i \Delta S \right] \vec{E} = \vec{0}$$

ce qui impose

$$\left(n^2 - \|\overrightarrow{\text{grad}} S\|^2 \right) k_0 + i \Delta S = 0$$

k_0 , n et S étant des grandeurs réelles, on déduit par identification des parties réelle et imaginaire dans l'équation ci-dessus que

$$\|\overrightarrow{\text{grad}} S\|^2(\vec{r}) = n^2(\vec{r})$$

Q18. Interpréter le résultat fourni par la loi fondamentale de l'optique géométrique dans le cas particulier d'un milieu homogène d'indice n uniforme.

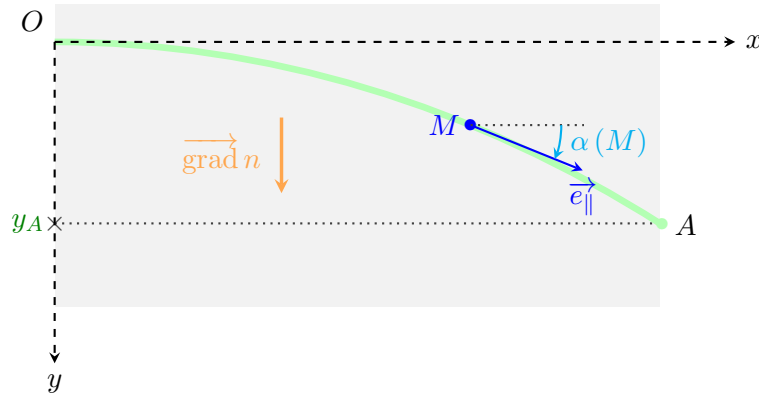
Dans un milieu d'indice n uniforme, la loi fondamentale de l'optique géométrique se simplifie sous la forme

$$\frac{d\vec{e}_{\parallel}}{ds} = \vec{0}$$

Autrement dit, le vecteur $\vec{e}_{\parallel}$ est indépendant du point considéré sur le rayon lumineux : dans un milieu d'indice n uniforme, **les rayons lumineux sont rectilignes**.

Q19. Le gradient d'indice dans l'échantillon de plexiglas de la FIGURE 2 est purement vertical. En explicitant la démarche suivie et les approximations effectuées, proposer une estimation numérique du gradient d'indice optique dans cet échantillon. Commenter le résultat obtenu.

Commençons par réaliser un schéma-modèle de la situation envisagée.



La figure 2 de l'énoncé montre que le gradient d'indice est vertical descendant dans le bloc de plexiglas utilisé pour la démonstration. Pour simplifier, on suppose que ce gradient est uniforme dans tout l'échantillon. Au niveau d'un point M quelconque du pinceau lumineux, avec le paramétrage défini sur le schéma ci-dessus, on a donc

$$\overrightarrow{\text{grad}} n(M) = \frac{dn}{dy}(M) \vec{e}_y \stackrel{\text{not.}}{=} n'(M) \vec{e}_y$$

Par suite, en projetant la loi fondamentale de l'optique géométrique selon Ox , on obtient

$$\frac{d[n \vec{e}_{\parallel}]}{ds}(M) \cdot \vec{e}_x = \overrightarrow{\text{grad}} n(M) \cdot \vec{e}_x = 0$$

et donc

$$\frac{d[n \vec{e}_{\parallel} \cdot \vec{e}_x]}{ds}(M) = 0 \quad \text{soit} \quad n(M) \cos \alpha(M) = \text{Cste}$$

(On retrouve une généralisation du résultat obtenu en **Q2**, ce qui aurait également été une justification recevable de la relation ci-dessus...).

En supposant que le gradient d'indice est approximativement uniforme dans l'échantillon de plexiglas, on peut alors estimer que

$$\|\overrightarrow{\text{grad } n}\| \simeq \frac{n(A) - n(O)}{y_A} \quad \text{avec} \quad n(O) \cos \alpha(O) = n(A) \cos \alpha(A)$$

Or, grâce à la figure 2 de l'énoncé (et notamment en se servant des doigts de l'expérimentateur comme un indicateur d'échelle), on peut estimer que

$$\cos \alpha(O) \simeq 1 \quad ; \quad \cos \alpha(A) \simeq 0,9 \quad ; \quad y_A \simeq 3 \text{ cm}$$

En considérant enfin que $n(A) \approx 1,5$, on calcule alors

$$\|\overrightarrow{\text{grad } n}\| \simeq n(A) \times \frac{1 - \cos \alpha(A)}{y_A} \simeq 1,5 \times \frac{1 - 0,9}{3 \cdot 10^{-2}}$$

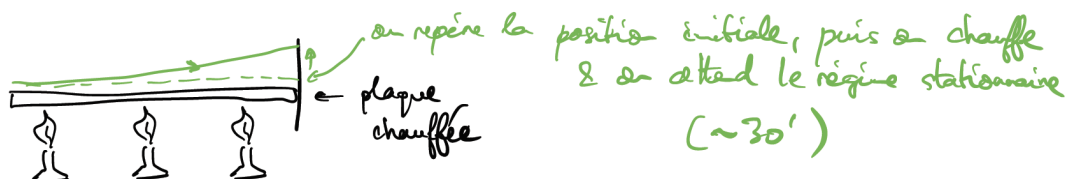
D'où

$\|\overrightarrow{\text{grad } n}\| \simeq 5 \text{ m}^{-1}$

Cette valeur peut sembler énorme à première vue. En pratique, elle l'est par rapport aux gradients d'indice, induits dans l'air par les variations de température au voisinage du sol et responsables des mirages optiques, qui sont typiquement de l'ordre de 10^{-2} m^{-1} . En revanche, dans une fibre optique à gradient d'indice, l'indice optique varie de quelques centièmes sur une distance de l'ordre de $10 \mu\text{m}$, ce qui correspond à un gradient d'indice de l'ordre de 10^3 m^{-1} . **La valeur obtenue paraît donc totalement plausible eu égard à ces ordres de grandeur.**

Q20. Décrire, au moyen d'un schéma et d'un protocole d'accompagnement, une autre expérience réalisable au laboratoire d'un lycée pour mettre en évidence la courbure des rayons lumineux induite par un gradient d'indice. *Le protocole, dont la rédaction n'excèdera pas une demie-page, doit être suffisamment explicite pour pouvoir être mis en œuvre par des étudiants.*

On peut proposer, parmi un panel d'autres expériences possibles, celle schématisée comme suit :



II. Exploitation interférométrique du gradient d'indice optique induit dans l'air par une plaque chauffée

II.A - Considérations thermodynamiques

Q21. En considérant que h est de l'ordre de $10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, estimer l'ordre de grandeur du temps que met la plaque d'acier à atteindre la température T_{pl} après l'activation du système de chauffage, lequel délivre une puissance constante au cours du temps.

On peut raisonnablement supposer que la température de la plaque d'acier est quasi-uniforme à chaque instant, et que celle-ci n'échange de l'énergie avec l'air environnant que par l'intermédiaire de sa face supérieure. Par conséquent, l'application du premier principe à la plaque d'acier, conduit à l'équation différentielle

$$\rho_{\text{pl}} L_x L_y L_z c_{\text{pl}} \frac{dT_{\text{pl}}}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ch}} - h L_x L_y [T_{\text{pl}} - T_{\infty}]$$

où $\mathcal{P}_{\text{ch}}$ désigne la puissance reçue par la plaque de la part du dispositif de chauffage.

Après la mise en route du système de chauffage, la température de la plaque vérifie donc une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont le temps caractéristique est donné par

$$\tau_{\text{ch}} = \frac{\rho_{\text{pl}} c_{\text{pl}} L_z}{h}$$

Dans l'air, en l'absence de convection forcée, on a typiquement $h \simeq 10 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$, ce qui conduit à l'estimation numérique

$$\tau_{\text{ch}} \simeq 17 \text{ min}$$

La durée du régime transitoire étant de l'ordre de quelques fois τ_{ch} , on en déduit que **l'on atteint le régime stationnaire au bout d'environ une heure.**

Q22. On suppose que l'air au voisinage immédiat de la plaque chauffée est au repos. Le flux thermique surfacique φ_Q est alors également donné par

$$\varphi_Q = -\kappa_a \frac{dT}{dz} (z = 0^+) \quad (10)$$

où κ_a est la conductivité thermique de l'air. Identifier la loi physique à l'origine de cette équation et dater le siècle au cours duquel elle a été énoncée.

La loi physique traduite ici est la **loi de Fourier**, qui date du **début du 19^{ème} siècle.**

II.B - Détermination du gradient de température dans l'air au voisinage immédiat de la plaque chauffée

Q23. On néglige tout phénomène de déflexion des rayons lumineux au-dessus de la plaque chauffée (cf. FIGURE 4). Exprimer la différence de marche $\delta(z)$ entre les deux rayons lumineux interférant en un point d'altitude z du capteur CCD en fonction des indices optiques $n(z)$ et n_{∞} , et de la longueur L_y de la plaque chauffée selon la direction Oy .

D'après les figures 3 & 4 de l'énoncé, on a directement

$$\delta(z) = [n_{\infty} - n(z)] L_y$$

Q24. Dans l'hypothèse où l'indice optique suivrait une loi affine vis-à-vis de l'altitude z au-dessus de la plaque chauffée, décrire précisément la figure d'interférences attendue sur le capteur. Interpréter qualitativement le (ou les) écart(s) entre cette prédiction et la figure d'interférences réellement obtenue, présentée sur la FIGURE 5.

L'éclairement relevé au niveau du capteur CCD est décrit par la formule de Fresnel

$$\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(z) \right) \right] = \mathcal{E}_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi L_y}{\lambda_0} (n_\infty - n(z)) \right) \right]$$

Ainsi, si l'indice optique variait de façon affine avec l'altitude z , l'éclairement serait une fonction périodique de la variable d'espace z : **on devrait donc observer des franges rectilignes horizontales régulièrement espacées**, d'interfrange

$$i = \frac{\lambda_0}{L_y \left| \frac{dn}{dz} \right|}$$

On constate sur la figure 5 que la figure d'interférences obtenue expérimentalement ne présente pas un interfrange constant : **dans l'expérience réalisée, le gradient de température dans la zone d'influence thermique au-dessus de la plaque n'est pas uniforme**. Plus précisément, on observe que la distance entre deux franges sombres consécutives augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la plaque chauffée, ce qui montre que **le gradient de température diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la plaque**.

Q25. On note $p(z)$ l'ordre d'interférences à l'altitude z au-dessus de la plaque et $p_0 = p(z = 0^+)$ la valeur particulière de l'ordre d'interférences juste au-dessus de la plaque. Montrer que la connaissance de $p(z)$ et de p_0 permet de remonter à la température $T(z)$ via

$$T(z) = \frac{T_\infty}{1 - \left[1 - \frac{T_\infty}{T_{\text{pl}}} \right] \times \frac{p(z)}{p_0}} \quad (12)$$

Par définition, l'ordre d'interférences correspond à

$$p(z) = \frac{\delta(z)}{\lambda_0} = \frac{L_y}{\lambda_0} [n_\infty - n(z)]$$

Conformément à l'équation (11) de l'énoncé, on a donc

$$p(z) = \frac{L_y a}{\lambda_0} \left[\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T(z)} \right]$$

et, en particulier en $z = 0^+$ où $T(z = 0^+) = T_{\text{pl}}$, on obtient

$$p_0 = \frac{L_y a}{\lambda_0} \left[\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T_{\text{pl}}} \right]$$

Par suite, on établit que

$$\frac{p(z)}{p_0} = \frac{1/T_\infty - 1/T(z)}{1/T_\infty - 1/T_{\text{pl}}}$$

En « inversant » cette dernière relation, on vérifie donc que

$$T(z) = \frac{T_\infty}{1 - \left[1 - \frac{T_\infty}{T_{\text{pl}}}\right] \times \frac{p(z)}{p_0}}$$

Q26. Dans l'article dont est extrait la FIGURE 5, les auteurs adoptent la valeur $p_0 = 7$. Discuter ce choix et estimer l'incertitude-type $u(p_0)$ associée à cette valeur.

D'après l'expression de l'ordre d'interférences obtenue dans la question précédente, ce dernier tend vers 0 quand on s'éloigne suffisamment de la plaque pour sortir de sa zone d'influence thermique. Par conséquent, on peut identifier la frange brillante visible tout en haut de la figure 5 de l'énoncé à la frange brillante d'ordre 0. L'ordre d'interférences augmente ensuite continûment quand on se rapproche de la plaque chauffante. Par simple comptage, on détermine ainsi que **la frange brillante visible juste au dessus du plan $z = 0$ correspond à l'ordre d'interférences $p = 7$.**

En adoptant la valeur $p_0 = 7$, les auteurs de l'article considèrent donc que l'altitude $z = 0^+$ coïncide exactement avec un maximum d'éclairement. **Ce choix est discutable dans la mesure où il est difficile de distinguer le bord de l'ombre portée de la plaque d'une éventuelle frange sombre.** Il semblerait plus raisonnable de **proposer un encadrement pour la valeur de p_0 .** En considérant que l'éclairement en $z = 0^+$ est en fait intermédiaire entre un maximum et un minimum consécutifs, la largeur Δ_{p_0} de cet encadrement peut être estimée à 1/2, ce qui donne alors l'incertitude-type

$$u(p_0) = \frac{\Delta_{p_0}}{\sqrt{12}} = 0,14$$

Q27. Discuter, en utilisant des arguments quantitatifs, l'adéquation du modèle exponentiel $T_{\text{mod}}(z)$ pour décrire le champ de température au-dessus de la plaque chauffée.

Tout d'abord, on constate sur la figure 6 de l'énoncé que :

- la courbe associée au modèle d'ajustement passe au voisinage de l'ensemble des points expérimentaux ;
- les résidus d'ajustement semblent (à peu près) aléatoirement distribués de part et d'autre de la valeur nulle (on note toutefois une légère ondulation) ;
- à l'exception du dernier point de mesure, les résidus d'ajustement sont comparables aux incertitudes-type associées aux valeurs expérimentales de T .

Ces différents éléments, qualitatifs, permettent de contrôler visuellement l'adéquation du modèle proposé avec les résultats expérimentaux. Il reste néanmoins à contrôler physiquement la pertinence des valeurs obtenues pour les paramètres du modèle utilisé, et en particulier les valeurs des paramètres θ_1 et θ_2 . En effet, d'après l'expression de $T_{\text{mod}}(z)$:

- Le paramètre θ_2 s'apparente à la température de la plaque, dont la valeur mesurée indépendamment à l'aide d'un thermocouple est

$$T_{\text{pl}} = 55,0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad ; \quad u(T_{\text{pl}}) = 0,2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

On dispose donc de deux valeurs expérimentales de la température de la plaque, dont on peut

tester la compatibilité au moyen de l'évaluation d'un z -score. On obtient

$$z = \frac{|T_{\text{pl}} - \theta_2|}{\sqrt{u^2(T_{\text{pl}}) + u^2(\theta_2)}} \simeq 1,14$$

La valeur du paramètre θ_2 est donc compatible avec la valeur expérimentale de T_{pl} .

- De façon similaire, le paramètre θ_1 s'apparente à la température T_∞ , également mesurée par ailleurs à l'aide d'un thermocouple. Pour ce jeu de valeurs expérimentales, on évalue de même

$$z = \frac{|T_\infty - \theta_1|}{\sqrt{u^2(T_\infty) + u^2(\theta_1)}} \simeq 4,17$$

Cette fois, la valeur du paramètre θ_1 n'est pas compatible avec la valeur expérimentale de T_∞ .

L'ensemble de ces éléments permet donc de conclure que le modèle exponentiel proposé permet de décrire convenablement l'évolution du champ de température au voisinage immédiat de la plaque, mais il ne convient plus au delà d'une distance de l'ordre de 1 cm.

Q28. Calculer numériquement la valeur expérimentale du gradient $\frac{dT}{dz}(z = 0^+)$ et l'incertitude-type associée.

Comme vu précédemment, le modèle exponentiel décrit correctement l'évolution du champ de température juste au-dessus de la plaque. On peut par conséquent exploiter l'expression de T_{mod} pour évaluer le gradient du champ de température en $z = 0^+$. On obtient (sans considération sur les chiffres significatifs)

$$\frac{dT}{dz}(z = 0^+) = -k_1(\theta_2 - \theta_1) = -49,44 \text{ K} \cdot \text{cm}^{-1}$$

En utilisant les formules de propagation, on accède à l'incertitude-type sur cette valeur via la relation

$$u\left(\frac{dT}{dz}(z = 0^+)\right) = \frac{dT}{dz}(z = 0^+) \times \sqrt{\frac{u^2(\theta_1) + u^2(\theta_2)}{(\theta_2 - \theta_1)^2} + \frac{u^2(k_1)}{k_1^2}} = 2,2 \text{ K} \cdot \text{cm}^{-1}$$

In fine, la valeur expérimentale du gradient de température en $z = 0^+$ est donc

$\frac{dT}{dz}(z = 0^+) = -49,4 \text{ K} \cdot \text{cm}^{-1} \quad ; \quad u\left(\frac{dT}{dz}(z = 0^+)\right) = 2,2 \text{ K} \cdot \text{cm}^{-1}$

II.C - Résultat de la mesure du coefficient d'échange h

Q29. Compléter, sur votre copie, les lignes 26 et 27 du script présenté dans la FIGURE 7.

<pre>26 dT0_MC = dT0 + rd.normal(0, u_dT0) 27 h_MC = - kappa(Tpl_MC)*dT0_MC/(Tpl_MC - Tinf_MC)</pre>
--

Q30. Expliquer en quoi consiste l'analyse statistique réalisée aux lignes 31 et 32 du script.

À l'issue de la simulation Monte-Carlo, on dispose d'un échantillon de $N = 50\,000$ valeurs du coefficient d'échange conducto-convectif. On peut alors considérer que :

- La meilleure estimation de h est donnée par la valeur moyenne de cet échantillon

$$\bar{h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i$$

La ligne 31 du script permet de calculer cette valeur.

- L'incertitude-type $u(h)$, qui caractérise la variabilité du résultat de la mesure, est donnée par l'écart-type expérimental de cet échantillon :

$$u(h) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (h_i - \bar{h})^2}$$

La ligne 32 du script permet de calculer cette valeur.

Q31. Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat final de la mesure du coefficient h .

En conservant deux chiffres significatifs pour l'incertitude-type sur h , le résultat final de la mesure s'écrit

$$h = 4,12 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \quad ; \quad u(h) = 0,19 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

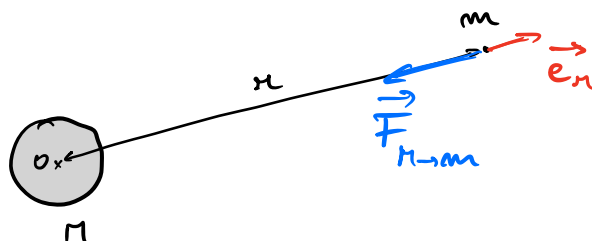
III. Mirages gravitationnels

III.A - Déviation newtonienne de la lumière

Q32. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle exercée par l'astre de masse M sur la particule de masse m localisée au point A sur la FIGURE 8. Vous ferez un schéma clair en y représentant les grandeurs utiles avec leur notation. Précisez la ou les hypothèse(s) qui doi(ven)t être faite(s) sur l'astre de masse M pour pouvoir utiliser l'expression de la force gravitationnelle trouvée précédemment.

Sous l'hypothèse d'une distribution de masse à symétrie sphérique, on peut remplacer la masse étendue par un point matériel de masse M au centre O de la distribution. La force exercée par la masse M sur la masse m s'écrit alors

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$



Q33. Justifier que le mouvement de la particule de masse m est plan.

Le théorème du moment cinétique en O appliqué dans le référentiel lié à la masse M , supposé galiléen, permet de montrer que le moment cinétique $\vec{L}$ est constant,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}$$

Or, $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ donc $\vec{r} \perp \vec{L}$ avec $\vec{L}$ constant implique que **le mouvement est plan**.

Q34. Montrer que

$$\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} - 2 \frac{\mathcal{G}M}{r} = 2e_m \quad (14)$$

où vous donnerez les expressions et le sens physique des grandeurs ℓ et e_m (on prendra l'origine des énergies potentielles à l'infini). Déterminer le signe de e_m dans le cas où la particule provient de l'infini. Nommer ce type de processus.

L'énergie mécanique de la particule se conserve car il n'y a pas de forces non conservatives,

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2] - \frac{\mathcal{G}Mm}{r}$$

Puisque $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, le moment cinétique de la particule s'écrit

$$\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\vec{u}$$

où $\vec{u} = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi$ est un vecteur unitaire constant ($\vec{u} = \vec{e}_y$ dans les notations de la figure 8). La conservation du moment cinétique permet alors d'exprimer $\dot{\varphi}$ en fonction de r :

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$$

Ainsi, l'expression de l'énergie mécanique devient

$$\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{r^2} - 2 \frac{\mathcal{G}M}{r} = 2e_m$$

avec $e_m = E_m/m$ représentant l'**énergie mécanique massique** et $\ell = L/m$ le **moment cinétique massique**.

L'énergie potentielle est nulle à l'infini, donc, si la particule provient de l'infini, son énergie mécanique est égale à son énergie cinétique initiale (à l'infini) et est donc positive : $e_m > 0$. Ce type de processus porte le nom de **diffusion élastique** : la particule va « diffuser » sur l'astre central et repartir à l'infini avec la même énergie qu'initialement.

Q35. Commenter brièvement la phrase de Soldner en la remplaçant dans son contexte historique. Justifier en quelques lignes que l'on peut utiliser l'équation (14) pour déterminer la trajectoire d'un rayon lumineux.

La nature ondulatoire de la lumière n'est pas acquise en 1801. Newton avait imposé sa vision corpusculaire (malgré une première approche ondulatoire par Huyghens au 17ème siècle). Ce n'est qu'au cours du 19ème siècle, grâce aux expériences d'interférences de Young (l'expérience des fentes de Young date justement de 1801-1803), puis de Fresnel et d'autres, que l'aspect ondulatoire a lentement pris le dessus sur l'aspect corpusculaire. Donc **au moment du papier de Soldner, il est normal de penser la lumière comme un corpuscule**.

En ce qui concerne la dernière partie du discours de Soldner, on sait aujourd'hui qu'il est possible d'agir sur nos sens sans avoir de masse, c'est le cas du photon, qui interagit avec notre rétine. La raison est que même sans masse, le photon transporte de l'énergie, et c'est par le biais d'échange d'énergie que l'on peut interagir avec la lumière. À l'époque de Soldner ce n'était pas évident qu'il pouvait y avoir de l'énergie sans masse.

Dans le cadre d'un cours du secondaire, **pour justifier l'utilisation de l'équation (14), on pourrait argumenter que la masse m n'y apparaît plus.** En effet, l'énergie mécanique E_m est proportionnelle à la masse ($E_m = mv_i^2/2$), donc l'énergie mécanique massique e_m n'en dépend pas. De même le moment cinétique est proportionnel à la masse, donc le moment cinétique massique ℓ n'en dépend pas. En principe, **il suffit donc de faire le calcul de la trajectoire pour une masse m non nulle, puis de faire tendre m vers zéro à la fin pour traiter le cas de la lumière.**

On peut aussi argumenter autour du **principe d'équivalence** (universalité de la chute des corps), à savoir $m_i \vec{a} = m_g \vec{g}$ donc $\vec{a} = \vec{g}$ si la masse inerte m_i est égale à la masse grave m_g (ce qui est testé à 10^{-15} aujourd'hui). Ainsi, l'accélération d'un corpuscule est égale à $\vec{g}$, qu'il ait une masse ou pas. Remarquons enfin que le phénomène d'aberration peut aussi se comprendre à l'aide d'une description ondulatoire, car l'optique géométrique (pour laquelle le calcul de l'aberration est aisée) n'est qu'une limite de la description ondulatoire de la lumière (longueur d'onde petite devant les échelles spatiales de variation de l'indice).

Q36. On note r_P la valeur de r au périhélie. Exprimer ℓ en fonction de la vitesse de la lumière v_P à ce moment là, et du périhélie r_P . Exprimer de même ℓ en fonction cette fois de la vitesse de la lumière à l'infini v_∞ et du paramètre d'impact b (voir FIGURE 8). En déduire la variation relative de la vitesse de la lumière $(v_P - v_\infty)/v_\infty$ et commenter.

Au niveau du périhélie, $\vec{v}_P \perp \vec{r}_P$, donc

$$\ell = r_P v_P$$

Par ailleurs, dans la branche asymptotique initiale, la vitesse est selon $\vec{e}_x$ et la composante du vecteur position selon $\vec{e}_z$ est b donc

$$\ell = b v_\infty$$

On en déduit

$$\frac{v_P - v_\infty}{v_\infty} = \frac{b - r_P}{r_P}$$

La vitesse du corpuscule de lumière n'est pas constante le long de la trajectoire : elle est plus grande au périhélie qu'à l'infini (car $b > r_P$). Dans le cas où l'angle de déviation est faible ($\chi_N \ll 1$), on a $b \simeq r_P$: l'écart relatif de vitesse sera faible également.

À l'époque de Soldner, on sait déjà (depuis Romer au 17^e siècle et Bradley au 18^e siècle) que la vitesse de la lumière est finie, mais on ne sait pas encore qu'il s'agit d'une constante universelle ; il n'y a donc pas de problème a priori à ce qu'elle varie dans l'esprit de l'époque. En effet, la première expérience qui interroge l'universalité de la vitesse de la lumière est une expérience d'Arago en 1810 sur la mesure de la déviation par un prisme de la lumière émise par les étoiles.

Q37. Rappeler le nom usuellement donné à la variable u et montrer que

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{\Phi_P}{v_P^2} \quad (15)$$

où vous donnerez l'expression et la signification de Φ_P . Estimer l'ordre de grandeur de $-\Phi_P/v_P^2$ pour

un rayon lumineux rasant la surface d'une étoile typique comme le Soleil, et pour un rayon lumineux rasant une planète typique comme la Terre. Commenter.

u est la **variable de Binet** (réduite). On utilise le fait que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\ell/r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_P}{u} \right) = \ell \frac{u^2}{r_P^2} \times \left(-\frac{r_P}{u^2} u' \right) = -\frac{\ell}{r_P} u' = -v_P u'$$

Et donc l'équation (14) s'écrit

$$v_P^2 u'^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{r_P^2}}_{v_P^2} u^2 - \frac{2\mathcal{G}Mu}{r_P} = v_P^2 (u'^2 + u^2) - \frac{2\mathcal{G}Mu}{r_P} = 2e_m$$

En dérivant une fois par rapport à φ , et en divisant par $2u'$, on obtient finalement

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{\Phi_P}{v_P^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\Phi_P = -\frac{\mathcal{G}M}{r_P}}$$

Le paramètre Φ_P correspond donc au **potentiel gravitationnel au niveau du périhélie**.

L'application numérique avec $v_P \simeq c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ donne, pour la Terre $\oplus$ et le soleil $\odot$,

$$\boxed{\frac{\Phi_{\oplus}}{c^2} \sim -10^{-9} \quad ; \quad \frac{\Phi_{\odot}}{c^2} \sim -10^{-6}}$$

Autrement dit le membre de droite de l'équation (15) est très petit devant 1 : il constitue une **correction** à une équation différentielle homogène dont la solution serait $u(\varphi) = A \cos \varphi + B \sin \varphi$. D'après les conditions initiales, $u(0) = 0$ donc $A = 0$. Ainsi, en ne prenant pas en compte l'effet du potentiel gravitationnel, on aurait $u \propto \sin \varphi$, c'est-à-dire $r \sin \varphi = \text{cte}$: la trajectoire serait parallèle à la droite Ox . **La déviation de la lumière sous l'effet de Φ_P sera petite**, comme prévu.

Q38. Déterminer la solution générale $u(\varphi)$, puis en déduire que

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_P)} \quad (16)$$

où φ_P est l'angle φ au périhélie et où vous donnerez les expressions de p et ϵ en fonction de r_P , Φ_P et v_P . Indiquer ce que représente ϵ et relier-le à e_m . Préciser la nature des trajectoires et représenter leur allure en fonction de la valeur de ϵ .

La solution générale de l'équation (15) s'écrit comme la solution homogène plus une solution particulière,

$$u(\varphi) = A \cos(\varphi + \psi) - \frac{\Phi_P}{v_P^2}$$

où les constantes A et ψ sont à déterminer à l'aide des conditions initiales. Pour celles-ci, il est commode d'exploiter les contraintes suivantes au périhélie :

- $u'(\varphi_P) = 0$ car r est minimum au périhélie donc u y est maximum : cette condition impose $\sin(\varphi_P + \psi) = 0$, donc $\psi = -\varphi_P$.
- $u(\varphi_P) = 1$ par définition même de u , ce qui permet d'obtenir $A = 1 + \Phi_P/v_P^2$.

On obtient ainsi

$$u(\varphi) = \left(1 + \frac{\Phi_P}{r_P^2}\right) \cos(\varphi - \varphi_P) - \frac{\Phi_P}{r_P^2}$$

puis,

$$r(\varphi) = \frac{r_P}{\left(1 + \frac{\Phi_P}{r_P^2}\right) \cos(\varphi - \varphi_P) - \frac{\Phi_P}{r_P^2}}$$

En retrouve bien l'expression de la conique donnée dans l'énoncé,

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

dans laquelle on identifie

$$p = -\frac{r_P v_P^2}{\Phi_P} \quad (p > 0)$$

et

$$\epsilon = -\frac{v_P^2}{\Phi_P} - 1$$

Le paramètre ϵ correspond à l'**excentricité** de la conique. L'équation (14) évaluée en $r = r_P$ permet d'obtenir

$$2e_m = v_P^2 - 2\frac{\mathcal{G}M}{r_P} \Rightarrow e_m = \frac{v_P^2}{2} \left(1 + \frac{2\Phi_P}{v_P^2}\right)$$

Or, de l'expression de l'excentricité établie précédemment, on peut tirer

$$\frac{\Phi_P}{v_P^2} = -\frac{1}{\epsilon + 1}$$

ce qui donne finalement

$$e_m = \frac{v_P^2}{2} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}$$

On déduit de l'expression précédente la nature de la trajectoire :

- Pour $e_m > 0$, on a $\epsilon > 1$: la trajectoire est **hyperbolique** (état de diffusion).
- Pour $e_m = 0$, on a $\epsilon = 1$ ce qui correspond au cas limite d'une trajectoire **parabolique**.
- Pour $e_m < 0$, on a $\epsilon < 1$: la trajectoire est **elliptique** (état lié). Dans le cas particulier où $\epsilon = 0$, on obtient une trajectoire circulaire.

Q39. En vous appuyant sur les ordres de grandeur estimés dans la question **Q37**, commenter la phrase suivante de Soldner : « *Mais comme nous ne connaissons aucun corps céleste dont la masse serait si grande qu'elle pourrait produire à sa surface une telle accélération de la pesanteur, un rayon lumineux décrit, dans le monde qui nous est connu, toujours une hyperbole.* ».

Les ordres de grandeur évalués à la question Q37 sont tels que

$$-\frac{\Phi_P}{v_P^2} \ll 1$$

Par suite, l'excentricité de la conique se simplifie en

$$\epsilon = -\underbrace{\frac{v_P^2}{\Phi_P}}_{\gg 1} - 1 \simeq -\frac{v_P^2}{\Phi_P} \quad \text{et} \quad \epsilon \gg 1$$

En pratique, on est donc toujours dans la situation $e_m > 0$, c'est-à-dire dans un état de diffusion : **la trajectoire est donc toujours une hyperbole**, en accord avec la phrase de Soldner.

Q40. On définit la compacité $\mathcal{C}$ d'un astre de masse M et de rayon R comme valant $\mathcal{C} = \mathcal{G}M/(Rc^2)$. Les objets les plus compacts de l'univers sont les trous noirs. On admet que ces derniers peuvent se caractériser classiquement en stipulant que la vitesse de libération à leur surface est égale à la célérité de la lumière c . En déduire la compacité d'un trou noir. Commenter et discuter de la possibilité d'obtenir des orbites liées pour la lumière autour d'un astre ? Donner une preuve observationnelle de l'existence des trous noirs.

La vitesse de libération peut se calculer en écrivant qu'une trajectoire non liée est obtenue pour $e_m \geq 0$, le cas limite étant tel que $e_m = 0$. Pour un objet qui serait lancé avec une vitesse v_{lib} depuis la surface d'un astre de masse M , cela implique

$$\frac{1}{2}v_{\text{lib}}^2 - \frac{\mathcal{G}M}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{R}}$$

En prenant $v_{\text{lib}} = c$, on obtient la relation suivante entre la masse et le rayon du trou noir,

$$\frac{2\mathcal{G}M}{Rc^2} = 1$$

d'où la compacité d'un trou noir

$$\boxed{\mathcal{C} = \frac{1}{2} = -\frac{\Phi}{c^2}}$$

Ainsi, **pour un rayon lumineux rasant la surface d'un trou noir, on aurait $\epsilon = 1$** , ce qui correspond précisément au cas limite entre une trajectoire liée et une trajectoire non liée. **Selon la théorie classique, il n'existe donc pas de trajectoire liée pour la lumière autour d'un trou noir.** Cela change en relativité générale, mais c'est une autre histoire...

Les trous noirs n'étaient pas connus à l'époque de Soldner, bien que Michel les avaient déjà théorisés de façon classique dès la fin du 18^e siècle avec la caractérisation basée sur la vitesse de libération. Nous avons aujourd'hui des preuves observationnelles de l'existence des trous noirs, la plus convaincante étant la **détection des ondes gravitationnelles émises par la coalescence de deux trous noirs** (2015), ou encore l'**observation – en 2019 – du disque d'accrétion autour du trou noir au centre de la galaxie M87**. On peut aussi citer l'**observation des orbites d'étoiles autour de notre centre galactique**, mettant en évidence le (candidat) trou noir super massif sagittaire A*.

Q41. On note χ_N la déviation totale de la lumière, c'est-à-dire l'angle entre le vecteur vitesse initial pour $t = -\infty$ et le vecteur vitesse final pour $t = +\infty$. Retrouver le résultat suivant de Soldner

$$\tan \frac{\chi_N}{2} = \frac{-\Phi_P/v_P^2}{\sqrt{1 + 2\Phi_P/v_P^2}} \quad (17)$$

En procédant aux approximations nécessaires, exprimer χ_N à l'ordre le plus bas en fonction de $\mathcal{G}$, M , du paramètre d'impact b et de la vitesse v_∞ .

Les branches asymptotiques de l'hyperbole sont telles que

$$\begin{cases} r(\varphi = 0) \rightarrow \infty \\ r(\phi = \pi + \chi_N) \rightarrow \infty \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \cos \varphi_P = -\frac{1}{\epsilon} \\ \cos(\pi + \chi_N - \varphi_P) = -\frac{1}{\epsilon} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\varphi_P = \pi + \chi_N - \varphi_P \quad \Rightarrow \quad \varphi_P = \frac{\chi_N}{2} + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi_P = -\frac{1}{\tan \frac{\chi_N}{2}}$$

Or, $1 + \tan^2 \varphi_P = \frac{1}{\cos^2 \varphi_P} = \epsilon^2$, donc

$$\tan^2 \frac{\chi_N}{2} = \frac{1}{\tan^2 \varphi_P} = \frac{1}{\epsilon^2 - 1}$$

puis

$$\tan \frac{\chi_N}{2} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \simeq \frac{1}{\epsilon} = -\frac{\Phi_P}{v_P^2}$$

La déviation attendue étant faible, on peut enfin approximer $\tan \frac{\chi_N}{2} \simeq \frac{\chi_N}{2}$. À l'ordre le plus bas en $\Phi_P/v_P^2 \ll 1$, on trouve donc

$$\frac{\chi_N}{2} \simeq -\frac{\Phi_P}{v_P^2} = \frac{\mathcal{G}M}{r_P v_P^2} = \frac{\mathcal{G}M}{bv_\infty v_P}$$

Et, toujours à l'ordre le plus bas, on a $v_P \simeq v_\infty$, d'où finalement

$$\boxed{\chi_N \simeq \frac{2\mathcal{G}M}{bv_\infty^2}}$$

III.B - Microlentille gravitationnelle

Équation des lentilles

Q42. À l'aide de considérations géométriques simples et des approximations nécessaires, établir la relation suivante, qui permet de déterminer θ :

$$D_{OS} \theta = D_{OS} \theta_S + D_{LS} \chi \quad (19)$$

Puis, toujours dans le cadre des approximations faites précédemment, en exprimant b en fonction de θ et D_{OL} , déduire l'équation des lentilles suivante :

$$\theta^2 - \theta_S \theta - \theta_E^2 = 0 \quad \text{où} \quad \theta_E = \sqrt{\frac{4\mathcal{G}M}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}}} \quad (20)$$

Décrire ce que voit l'observateur dans le cas $\theta_S = 0$.

On part de $JI = JS + SI$, avec à l'ordre le plus bas dans les angles

$$JS = D_{OS} \theta_S \quad ; \quad JI = D_{OS} \theta \quad ; \quad SI = D_{LS} \chi$$

Ce qui donne tout de suite le résultat attendu

$$D_{\text{OS}} \theta = D_{\text{OS}} \theta_S + D_{\text{LS}} \chi$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\theta = \theta_S + \frac{D_{\text{LS}}}{D_{\text{OS}}} \chi \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{4\mathcal{G}M}{bc^2}$$

Or, dans l'hypothèse de la lentille mince, le paramètre d'impact s'écrit $b = D_{\text{OL}} \theta$. Donc

$$\theta = \theta_S + \frac{D_{\text{LS}}}{D_{\text{OS}}} \frac{4\mathcal{G}M}{D_{\text{OL}} \theta c^2}$$

i.e.

$$\theta^2 - \theta_S \theta - \theta_E^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \theta_E = \sqrt{\frac{4\mathcal{G}M}{c^2} \frac{D_{\text{LS}}}{D_{\text{OS}} D_{\text{OL}}}}$$

Dans le cas particulier où $\theta_S = 0$, la solution de l'équation précédente est $\theta = \pm \theta_E$. Par symétrie de révolution autour de la ligne de visée, **l'observateur voit donc un anneau de rayon angulaire θ_E** .

Q43. Application numérique : calculer l'ordre de grandeur de θ_E pour un effet de lentille gravitationnelle induit par un astre d'une masse solaire dans la galaxie (on pourra prendre comme distances caractéristiques 10 kpc). Le taux d'expansion de l'univers est aujourd'hui d'environ $H_0 \simeq 70 \text{ (km.s}^{-1}\text{)}/\text{Mpc}$. À l'aide de cette grandeur, estimer la taille de l'univers et en déduire un ordre de grandeur de l'effet de lentille gravitationnelle qui peut être observé dans le contexte cosmologique par une galaxie ($M = 10^{12} \times M_\odot$).

Pour estimer l'effet de lentille gravitationnelle induit par un astre de masse $M = M_\odot$ dans la galaxie, on considère $D_{\text{OS}} \sim D_{\text{OL}} \sim D_{\text{LS}} \sim 10 \text{ kpc}$. On obtient alors

$$\theta_E \sim 10^{-3} \text{ ''}$$

À partir de la constante de Hubble H_0 , on estime

$$D_{\text{OS}} \sim D_{\text{OL}} \sim D_{\text{LS}} \sim \frac{c}{H_0} \sim 2 \text{ Gpc}$$

On en déduit une estimation de l'effet de lentille cosmologique

$$\theta_E \sim 1 \text{ ''}$$

L'effet de lentille cosmologique est plus important que l'effet de lentille galactique.

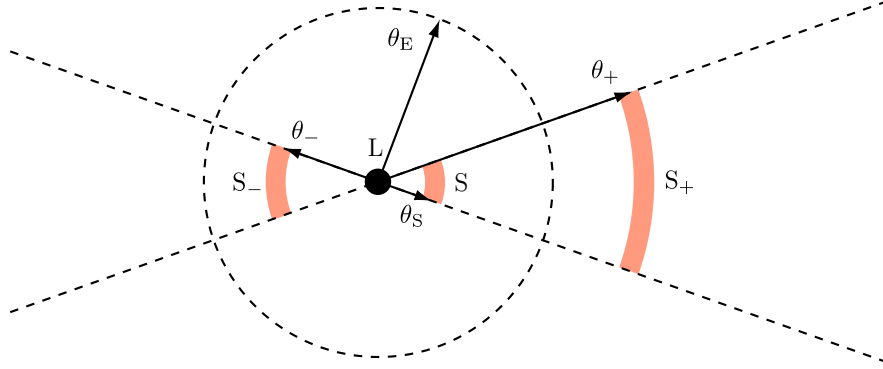
Images multiples et amplification

Q44. Déterminer les solutions $\theta_{\pm}$ correspondant aux deux images que voit l'observateur dans le cas $\theta_S \neq 0$. Représenter ces deux images sur la FIGURE 9, reproduite sur la copie ; faire également figurer le rayon d'Einstein θ_E .

En résolvant l'équation (20), on obtient immédiatement

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\theta_S \pm \sqrt{\theta_S^2 + 4\theta_E^2} \right]$$

Une des images (S_- , associée à l'angle θ_-) est à l'intérieur du rayon d'Einstein ; l'autre (S_+ , associée à l'angle θ_+) est à l'extérieur.



Q45. Justifier l'expression (21) puis en déduire les amplifications $\mathcal{A}_{\pm}$ des deux images en fonction du paramètre d'impact angulaire réduit $w \equiv \theta_S/\theta_E$. Vérifier que $\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_- = 1$.

Les angles solides s'écrivent $\sin \theta \, d\theta \, d\varphi \simeq \theta \, d\theta \, d\varphi$, ce qui justifie la relation

$$\mathcal{A} = \frac{\theta}{\theta_S} \frac{d\theta}{d\theta_S}$$

car $d\varphi = d\varphi_S$ (la déviation de la lumière a lieu dans un plan). En dérivant l'angle $\theta_{\pm}$ obtenu à la question précédente, il vient immédiatement

$$\mathcal{A}_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{w^2 + 2}{2w \sqrt{w^2 + 4}} \quad \text{où} \quad w \equiv \frac{\theta_S}{\theta_E}$$

On vérifie trivialement que $\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_- = 1$.

Q46. Discuter la valeur de $\mathcal{A}_{\text{tot}} \equiv |\mathcal{A}_+| + |\mathcal{A}_-|$ par rapport à 1. Calculer numériquement $\mathcal{A}_{\text{tot}}$ pour une source sur le rayon d'Einstein $\theta_S = \theta_E$ (à défaut d'application numérique à partir de l'expression de $\mathcal{A}_{\pm}$, estimer la valeur demandée grâce au graphique). Discuter la limite $\theta_S \rightarrow 0$.

Les résultats obtenus précédemment montrent que $\mathcal{A}_- < 0$ tandis que $\mathcal{A}_+ > 0$: l'image intérieure est renversée et l'image à l'extérieur du rayon d'Einstein est droite. Par suite, on a $|\mathcal{A}_-| = -\mathcal{A}_-$ et $|\mathcal{A}_+| = \mathcal{A}_+$, et donc

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_- = \frac{w^2 + 2}{w \sqrt{w^2 + 4}} > 1$$

Au total, il se produit donc un phénomène d'amplification.

Dans le cas d'une source sur le rayon d'Einstein, $w = 1$ et l'amplification vaut

$$\mathcal{A}_{\text{tot}}(\theta_S = \theta_E) \simeq \frac{3}{\sqrt{5}} \simeq 1,34$$

Lorsque la source se rapproche de l'axe de visée, l'amplification prévue par le modèle diverge, ce qui s'explique par le fait que l'objet défecteur ne peut plus être supposé ponctuel.

Microlentilles dans notre galaxie

Q47. À quelle distance angulaire typique doit passer le MACHO par rapport à l'étoile d'arrière plan pour voir un effet sensible ? Faire un schéma représentant la situation.

L'échelle typique est fixée par le rayon d'Einstein. On a vu en effet que l'amplification vaut 1,34 lorsque $\theta_S = \theta_E$.

Q48. Justifier que

$$w(t) = \sqrt{w_0^2 + \frac{v^2 t^2}{R_E^2}} \quad (22)$$

où vous donnerez l'expression de R_E en fonction de θ_E et D_{OL} .

On a

$$\theta_S(t) = \frac{\sqrt{D_{\text{LS}_0}^2 + v^2 t^2}}{D_{\text{OL}}}$$

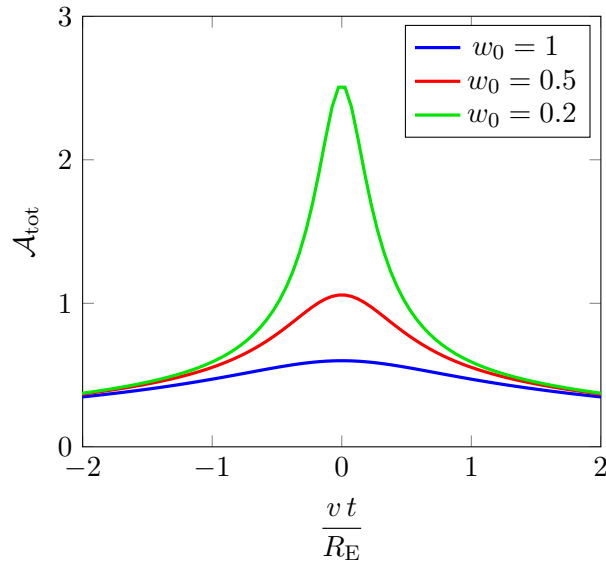
où D_{LS_0} est le paramètre d'impact. On en déduit

$$w(t) = \frac{\theta_S(t)}{\theta_E} = \sqrt{w_0^2 + \frac{v^2 t^2}{R_E^2}}$$

avec

$$w_0 = \frac{D_{\text{LS}_0}}{\theta_E D_{\text{OL}}} \quad \text{et} \quad R_E = \theta_E D_{\text{OL}}$$

Q49. Sur la FIGURE 11, que vous reproduirez sur votre copie, tracer qualitativement $\mathcal{A}_{\text{tot}}(t)$ pour une valeur de w_0 plus petite que 0,5, puis pour une valeur de w_0 plus grande que 0,5.



Q50. Exprimer le temps caractéristique τ sur lequel l'amplification de la luminosité se produit. Évaluer numériquement τ pour un déflecteur d'une masse solaire, se déplaçant à la vitesse de 200 km.s^{-1} , dans le cadre d'une lentille ayant lieu dans notre galaxie.

Le temps caractéristique τ peut être défini comme le temps que met l'objet pour parcourir un rayon d'Einstein. On a donc $v \tau \sim D_{\text{OL}} \theta_E$, ce qui correspond à

$$\tau \sim \frac{D_{\text{OL}} \theta_E}{v}$$

Pour une lentille galactique de une masse solaire, **la durée τ obtenue est typiquement de l'ordre du mois.**

Q51. Si on échantillonne les courbes de lumière avec des intervalles de temps entre une heure et une année, avec les hypothèses de la question précédente, quel intervalle de masse (en unité de masse solaire) peut-on espérer détecter ?

La dépendance de τ dans la masse est en racine carrée. En échantillonnant les courbes de lumière entre une heure et une année, **on peut donc espérer détecter des masses entre quelques $10^{-7} M_{\odot}$ et $10 M_{\odot}$.**

Q52. Parmi les millions de courbes de lumière obtenues expérimentalement de façon automatisée, proposer quelques critères permettant de sélectionner celles qui correspondent à un effet de microlentille gravitationnelle et non pas à une variabilité d'une autre nature, telles que les étoiles variables, les supernovae...

Voici quelques caractéristiques propres à l'effet de lentille gravitationnel sur les courbes de lumière :

- courbe de lumière symétrique ;
- effet achromatique (ne dépendant pas de la longueur d'onde) ;
- effet ponctuel (non régulier ou périodique).