

I. Champ magnétique interstellaire et rotation Faraday

A. Mesure de dispersion

Q1. On écrit les équations du mouvement en ne tenant compte que des parties électriques des forces

$$\boxed{m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{\mathcal{E}} \quad m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = e\vec{\mathcal{E}}} \quad (1)$$

Les deux équations doivent être correctes : 1 point

Q2.

$$m_p \vec{v}_p + m_e \vec{v}_e = \vec{C}^{\text{te}} \quad (2)$$

La condition initiale permet d'écrire $\vec{C}^{\text{te}} = \vec{0}$ et donc

$$\boxed{\vec{v}_p = -\frac{m_e}{m_p} \vec{v}_e} \quad (3)$$

L'équation doit être correcte et la justification par la condition initiale explicitée : 1 point

On écrit le rapport des vitesses

$$\frac{|\vec{v}_p|}{|\vec{v}_e|} = \frac{m_e}{m_p} \ll 1 \quad (4)$$

et on en déduit

$$\vec{j} = n_p e \vec{v}_p - n_e e \vec{v}_e = ne (\vec{v}_p - \vec{v}_e) \quad (5)$$

ce qui donne

$$\boxed{\vec{j} \approx -ne \vec{v}_e} \quad (6)$$

L'expression de $\vec{j}$ doit être correcte et la justification par le rapport des masses doit être explicitée : 1 point

Q3. On part des équations de Maxwell données en annexe

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \quad (7)$$

et on doit invoquer la neutralité électrique globale $\rho_e = n_p e - n_e e = 0$ pour obtenir

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}} \quad (8)$$

Les équations doivent toutes être correctes, avec en particulier $\rho_e = 0$: 1 point

On part de la dérivée temporelle de l'équation de Maxwell-Ampère

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \quad (9)$$

et on utilise Maxwell-Faraday pour transformer le membre de gauche

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{B}}) = \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathcal{E}}) = \Delta \vec{\mathcal{E}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}}) = \Delta \vec{\mathcal{E}} \quad (10)$$

en utilisant l'identité vectorielle donnée en annexe. On obtient finalement

$$\boxed{\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \left[\Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \right]} \quad (11)$$

Equation correcte en fonction du seul champ $\vec{\mathcal{E}}$: 2 points

Q4. On utilise l'expression approchée de $\vec{j}$ obtenue en **Q2** et l'équation du mouvement de la **Q1**

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -ne \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{\mathcal{E}} \quad (12)$$

ce qui donne l'équation différentielle cherchée

$$\boxed{\Delta \vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \vec{\mathcal{E}} = \vec{0}} \quad (13)$$

Equation correcte sur $\vec{\mathcal{E}}$: 1 point

Avec $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\underline{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{r}, t)] = \text{Re}[\underline{\vec{\mathcal{E}}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}]$ on a, avec la notation complexe

$$-k^2 \underline{\vec{\mathcal{E}}} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\vec{\mathcal{E}}} - \frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \underline{\vec{\mathcal{E}}} = 0 \quad (14)$$

et donc, pour avoir une solution non-triviale, il faut que

$$\boxed{k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2} \quad (15)$$

avec la pulsation plasma

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}} \quad (16)$$

Expression correcte de la pulsation plasma : 1 point

Q5.

- Si $\omega > \omega_p$ alors $k^2 > 0$ et k réel : solution propagative
- Si $\omega < \omega_p$ alors $k^2 < 0$ et k imaginaire : solution exponentielle décroissante

On veut voir les deux cas correctement explicités : 1 point

Q6. On a, en utilisant la forme complexe de Maxwell-Faraday, $i\vec{k} \wedge \underline{\vec{\mathcal{E}}} = i\omega \underline{\vec{\mathcal{B}}}$ donc, en réels,

$$\boxed{\vec{\mathcal{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{E}}}{\omega}} \quad (17)$$

De plus Maxwell-Ampère, dérivée par rapport au temps et combinée avec l'expression du vecteur densité de courant, donne

$$i\vec{k} \wedge (-i\omega \underline{\vec{\mathcal{B}}}) = \left[\frac{\mu_0 ne^2}{m_e} - \frac{\omega^2}{c^2} \right] \underline{\vec{\mathcal{E}}} = \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} \underline{\vec{\mathcal{E}}} \quad (18)$$

et par conséquent

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}} = \frac{c^2 \omega}{\omega_p^2 - \omega^2} \vec{k} \wedge \vec{\mathcal{B}}} \quad (19)$$

Ces deux relations montrent que le trièdre $(\vec{k}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$ est trirectangle direct et qu'on a donc une structure d'OPPM.

On veut voir "structure d'onde plane" et l'une au moins des deux équations reliant $\vec{k}$, $\underline{\vec{\mathcal{E}}}$ et $\underline{\vec{\mathcal{B}}}$: 1 point

Avec $\omega \gg \omega_p$ on a $\omega \approx kc$ et donc

$$|\vec{\mathcal{B}}| \approx \frac{|\vec{\mathcal{E}}|}{c} \quad (20)$$

Le rapport des parties électrique et magnétique de la force de Lorentz est alors

$$\boxed{\frac{e|\vec{\mathcal{E}}|}{ev|\vec{\mathcal{B}}|} \approx \frac{c}{v} \gg 1} \quad (21)$$

ce qui justifie l'approximation.

On veut voir une justification quantitative fondée sur le rapport ci-dessus : 1 point

Q7. Le raisonnement se fonde sur l'équilibre entre force de gravité et force centrifuge. Si l'astre tournait trop vite sur lui-même les forces centrifuges à l'équateur deviendraient plus importantes que la gravité. L'étoile perdrait alors de la matière. On doit donc avoir, pour une particule de masse μ située à la surface de l'étoile et à l'équateur,

$$\mu\Omega^2 R \leq \frac{G\mu M}{R^2} \quad (22)$$

ce qui implique une vitesse de rotation suffisamment faible

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \leq \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (23)$$

et donc une période suffisamment grande

$$T \geq 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (24)$$

Inversement, si l'on observe un signal périodique de période T qu'on attribue à la rotation, on en déduit une limite inférieure à la densité moyenne de l'étoile $\rho = M/V$, soit

$$\boxed{\rho \geq \frac{3\pi}{GT^2}} \quad (25)$$

On veut un raisonnement physiquement correct : 2 points

Expression correcte de la densité moyenne minimale : 1 point

Numériquement, pour le pulsar du Crabe,

$$\boxed{\rho \geq 1,2 \cdot 10^{14} \text{ kg.m}^{-3}} \quad (26)$$

Application numérique correcte à un facteur 3 près : 1 point

Il faut voir que cette limite inférieure est très conservatrice car une étoile en rotation rapide est nettement aplatie aux pôles et élargie à l'équateur, de sorte que la force centrifuge y est plus élevée

et la gravitation plus faible. Autrement dit, avec une densité moyenne donnée, l'étoile doit tourner plus lentement que prévu par ce calcul simpliste pour rester stable, et inversement, si elle tourne aussi vite, c'est qu'elle doit être plus dense. En effet, en prenant la masse et le rayon typiques donnés dans l'énoncé on trouve

$$\rho \sim 7,5 \cdot 10^{17} \text{ kg.m}^{-3} \quad (27)$$

[BONUS] Si cette discussion est faite : 1 point

Comme comparaison, on obtient une densité comparable si l'on prend la population humaine entière $M \sim 50 \times 6 \cdot 10^9 = 3 \cdot 10^{11} \text{ kg}$ et qu'on la fait tenir dans un morceau de sucre $V \sim 1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$.

Toute comparaison raisonnable et simple à visualiser, avec la valeur trouvée $10^{14} \text{ kg.m}^{-3}$ ou avec celle $10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$: 1 point

Q8. On a la vitesse de phase

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \quad (28)$$

et la vitesse de groupe

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \quad (29)$$

Expression de la vitesse de phase : 1 point

Expression de la vitesse de groupe : 1 point

Q9. On a la fréquence plasma

$$\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (30)$$

numériquement

$$\nu_p \approx 1,5 \text{ kHz} \quad (31)$$

Application numérique correcte à un facteur 3 près : 1 point

L'émission radio du pulsar est observée à des fréquences de plusieurs centaines de MHz, on a donc $\nu \gg \nu_p$ et la propagation peut avoir lieu.

On veut voir une justification complète (fréquence de l'émission comparée à la fréquence plasma et invocation du résultat de la Q5) : 1 point

Q10. Le pulse se propage à la vitesse de groupe, donc le temps de propagation sur une distance D est donné par l'intégrale

$$\Delta t = \int_0^D \frac{dz}{v_g} \quad (32)$$

Expression correcte de cette intégrale : 1 point

On a donc

$$\Delta t = \int_0^D \frac{dz}{c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{c} \int_0^D \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right]^{-1/2} dz \approx \frac{1}{c} \int_0^D \left[1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right] dz = \frac{D}{c} + \int_0^D \frac{ne^2}{2m_e \epsilon_0 c \omega^2} dz \quad (33)$$

en utilisant le fait que $\omega \gg \omega_p$. En exprimant la pulsation en fonction de la fréquence on obtient

$$\Delta t(\nu) = \frac{D}{c} + \frac{e^2}{8\pi^2 m_e \epsilon_0 c \nu^2} \int_0^D n dz \quad (34)$$

On a donc bien l'expression attendue, avec

$$A_t = \frac{e^2}{8\pi^2 m_e \epsilon_0 c} \quad (35)$$

Numériquement, on a

$$A_t \approx 1,3 \times 10^{-7} \text{ Hz} \cdot \text{m}^2 \quad (36)$$

Expression littérale de A_t : 1 point

Application numérique correcte à un facteur 3 près : 1 point

Q11. Il s'agit de comprendre que l'arrivée du pulse est plus tardive à plus basse fréquence, et donc que la différence des temps d'arrivée Δt_1 et Δt_2 à deux fréquences ν_1 et ν_2 s'écrit

$$\Delta t_1 - \Delta t_2 = A_t \mathcal{D}_0 \left(\frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2} \right) \quad (37)$$

On en tire alors la mesure de dispersion

$$\mathcal{D}_0 = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{A_t \left(\frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2} \right)} \quad (38)$$

Méthodologie correcte : 1 point

On lit par exemple sur le diagramme temps-fréquence que $\Delta t_1 = 380$ ms pour $\nu_1 = 320$ MHz et $\Delta t_2 = 160$ ms pour $\nu_2 = 365$ MHz. On a donc numériquement

$$\mathcal{D}_0 = \frac{0,38 - 0,16}{1,3 \times 10^{-7} \left[\frac{1}{(3,2 \times 10^8)^2} - \frac{1}{(3,65 \times 10^8)^2} \right]} \approx 7,5 \times 10^{23} \text{ m}^{-2} \quad (39)$$

Application numérique correcte à un facteur 3 près : 1 point

Pour l'exprimer dans les unités demandées, il faut noter que

$$1 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3} = 3 \times 10^{16} \text{ m} \times 10^6 \text{ m}^{-3} = 3 \times 10^{22} \text{ m}^{-2} \quad (40)$$

On a donc finalement

$$\boxed{\mathcal{D}_0 \approx 25,0 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3}} \quad (41)$$

Application numérique correcte dans ces unites à un facteur 3 près : 1 point

Pour avoir une estimation grossière de la distance on écrit

$$\boxed{D \approx \frac{\mathcal{D}_0}{n}} \quad (42)$$

en faisant l'hypothèse d'un milieu de densité électronique uniforme.

Expression littérale de cette estimation de la distance : 1 point

Numériquement, en prenant $n_e \approx 0,03 \text{ cm}^{-3}$, on a

$$\boxed{D \approx 830 \text{ pc}} \quad (43)$$

Application numérique correcte à un facteur 3 près : 1 point

TOTAL DES POINT DE CETTE SOUS-PARTIE : 29

B. Mesure de rotation

Q12. On a, à la position z sur la ligne de visée,

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re} \left[\mathcal{E}_0 e^{i[k(\omega)z - \omega t]} \left(\frac{\vec{e}_+ + \vec{e}_-}{2} \right) \right]} \quad (44)$$

On a alors une polarisation rectiligne, dont l'angle de polarisation est indépendant de la position

$$\boxed{\psi(z) = \psi(0) = 0} \quad (45)$$

Expression du champ électrique : 1 point

Expression de l'angle de polarisation $\psi(z)$: 1 point

Q13. On a, cette fois,

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re} \left[\frac{\mathcal{E}_0}{2} e^{i[k_+(\omega)z - \omega t]} \vec{e}_+ + \frac{\mathcal{E}_0}{2} e^{i[k_-(\omega)z - \omega t]} \vec{e}_- \right] \quad (46)$$

On peut mettre certains facteurs en commun, et exprimer les vecteurs $\vec{e}_+$ et $\vec{e}_-$ sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$,

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re} \left[\frac{\mathcal{E}_0}{2} e^{-i\omega t} \left\{ e^{ik_+(\omega)z} (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) + e^{ik_-(\omega)z} (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) \right\} \right] \quad (47)$$

et donc, en regroupant les termes selon le vecteur de base considéré, on a

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re} \left[\frac{\mathcal{E}_0}{2} e^{-i\omega t} \left\{ [e^{ik_+(\omega)z} + e^{ik_-(\omega)z}] \vec{e}_x + i [e^{ik_+(\omega)z} - e^{ik_-(\omega)z}] \vec{e}_y \right\} \right]} \quad (48)$$

Expression du champ électrique : 2 points

Q14. On a, d'après l'expression donnée pour $k_+(\omega)$,

$$k_+(\omega) = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{(\omega_p/\omega)^2}{1 - (\omega_c/\omega)} \right]^{1/2} \quad (49)$$

On suppose que $\omega \gg \omega_p$ (approximation déjà faite plus haut) et que $\omega \gg \omega_c$, de sorte qu'on peut faire un développement limité,

$$k_+(\omega) \approx \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega} \right) \right] \quad (50)$$

On a donc, en gardant les termes d'ordre au plus ω^{-3} ,

$$\boxed{k_+(\omega) \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} - \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2\omega^3} \right)} \quad (51)$$

Pour obtenir $k_-(\omega)$, il suffit de remarquer qu'on l'obtient en faisant $\omega_c \rightarrow -\omega_c$, et donc

$$\boxed{k_-(\omega) \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} + \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2\omega^3} \right)} \quad (52)$$

En l'absence de champ magnétique, on a

$$\boxed{k(\omega) \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right)} \quad (53)$$

donc on a bien la forme demandée, avec

$$\boxed{\Delta k = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2c\omega^2}} \quad (54)$$

Donner les conditions $\omega \gg \omega_p$ et $\omega \gg \omega_c$: 1 point
Développements limités à l'ordre suffisant : 2 points
Expression de Δk demandée : 1 point

On a alors l'expression du champ électrique sous la forme

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re} \left[\frac{\mathcal{E}_0}{2} e^{-i\omega t} \left\{ [e^{i(k-\Delta k)z} + e^{i(k+\Delta k)z}] \vec{e}_x + i [e^{i(k-\Delta k)z} - e^{i(k+\Delta k)z}] \vec{e}_y \right\} \right] \quad (55)$$

On peut mettre e^{ikz} en facteur

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re} \left[\frac{\mathcal{E}_0}{2} e^{i(kz-\omega t)} \left\{ [e^{-i\Delta kz} + e^{i\Delta kz}] \vec{e}_x + i [e^{-i\Delta kz} - e^{i\Delta kz}] \vec{e}_y \right\} \right] \quad (56)$$

et utiliser les fonctions trigonométriques

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re} \left[\mathcal{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \{ \cos(\Delta kz) \vec{e}_x + \sin(\Delta kz) \vec{e}_y \} \right]} \quad (57)$$

Le vecteur champ électrique est porté par un vecteur "constant" donné par

$$\vec{u}(z) = \cos(\Delta kz) \vec{e}_x + \sin(\Delta kz) \vec{e}_y \quad (58)$$

On a donc une polarisation linéaire, avec un angle de polarisation au niveau de l'observateur donné par

$$\psi(D) = \Delta k D = \frac{\omega_p^2 \omega_c D}{2c\omega^2} \quad (59)$$

En insérant les expressions de ω_p et ω_c , on a l'expression demandée

$$\boxed{\psi(D) = \frac{e^3 n_e B_z D}{2\omega^2 c \epsilon_0 m_e^2}} \quad (60)$$

Expression du champ électrique faisant apparaître la rotation : 2 points

Expression de $\psi(D)$ avec une dérivation convaincante puisqu'elle est donnée : 1 point

Pour un milieu hétérogène, les quantités susceptibles de varier sur la ligne de visée sont n_e et B_z . On peut donc généraliser en écrivant

$$\psi(D) = \frac{e^3}{2\omega^2 c \epsilon_0 m_e^2} \int_0^D n_e B_z dz \quad (61)$$

On utilise alors la relation $\omega = (2\pi c)/\lambda$ pour obtenir la relation demandée

$$\psi(D) = \mathcal{F}_0 \lambda^2 \quad (62)$$

avec la mesure de rotation

$$\boxed{\mathcal{F}_0 = \frac{e^3}{8\pi^2 c^3 \epsilon_0 m_e^2} \int_0^D n_e B_z dz} \quad (63)$$

Généralisation (intégrande correcte) : 1 point

Expression correcte de $\mathcal{F}_0$: 1 point

Q15. On peut imaginer une méthode d'estimation du champ magnétique le long de la ligne de visée qui soit une moyenne pondérée par la densité des électrons

$$\langle B_z \rangle = \frac{\int_0^D n_e B_z dz}{\int_0^D n_e dz} \quad (64)$$

On réécrit cette expression en faisant intervenir la mesure de rotation et la mesure de dispersion, comme demandé

$$\boxed{\langle B_z \rangle = \frac{8\pi^2 c^3 \epsilon_0 m_e^2}{e^3} \frac{\mathcal{F}_0}{\mathcal{D}_0}} \quad (65)$$

La densité électronique étant positive, le signe de la mesure de rotation donne celui de la projection (moyenne) du champ magnétique sur la ligne de visée (positive si le champ pointe vers l'observateur, négative dans le cas contraire).

Expression de $\langle B_z \rangle$: 1 point

Discussion du signe de $\mathcal{F}_0$: 1 point

Q16. Le champ magnétique Galactique est en moyenne parallèle au plan de la Galaxie, donc en observant à haute latitude, le champ est majoritairement perpendiculaire à la ligne de visée, donc ne produit pas de rotation Faraday.

Explication raisonnable : 1 point

On utilise la formule trouvée à la question précédente

$$\langle B_z \rangle = \frac{8\pi^2 c^3 \epsilon_0 m_e^2}{e^3} \frac{\mathcal{F}_0}{\mathcal{D}_0} \quad (66)$$

avec $\mathcal{F}_0 = 1000 \text{ rad.m}^{-2}$ et $\mathcal{D}_0 = 7,5 \times 10^{23} \text{ m}^{-2}$. On trouve numériquement

$$\boxed{\langle B_z \rangle \approx 5,1 \times 10^{-9} \text{ T}} \quad (67)$$

Application numérique correcte à un facteur 3 près : 1 point

TOTAL DES POINT DE CETTE SOUS-PARTIE : 17

TOTAL DES POINT DE CETTE PARTIE : 46

II. Poussières interstellaires et champ magnétique

A. Polarisation de la lumière par un grain interstellaire

Q17. On part de l'équation du transfert en tenant compte du fait que l'émissivité est prise nulle

$$\frac{d\mathcal{I}}{dz} = -\kappa\mathcal{I} \quad (68)$$

dont la solution est immédiate puisqu'on suppose κ uniforme

$$\boxed{\mathcal{I}(z) = \mathcal{I}_0 e^{-\kappa z}} \quad (69)$$

En sortie du nuage, on a, en introduisant la profondeur optique $\tau = \kappa L$,

$$\boxed{\mathcal{I}(L) = \mathcal{I}_0 e^{-\tau}} \quad (70)$$

Expressions de $\mathcal{I}(z)$ et de $\mathcal{I}(L)$ correctes : 1 point

Q18. La surface du grain projetée sur le plan du ciel est $2ah$, donc les efficacités d'extinction demandées sont

$$\boxed{Q_{\parallel} = \frac{\Sigma_{\parallel}}{2ah}} \quad \boxed{Q_{\perp} = \frac{\Sigma_{\perp}}{2ah}} \quad (71)$$

Expressions de $Q_{\parallel}$ et $Q_{\perp}$ correctes : 1 point

Q19. On a, en adaptant le résultat de la **Q17** ,

$$\boxed{\mathcal{I}_{\parallel}(L) = \frac{\mathcal{I}_0}{2} e^{-\tau_{\parallel}}} \quad \boxed{\mathcal{I}_{\perp}(L) = \frac{\mathcal{I}_0}{2} e^{-\tau_{\perp}}} \quad (72)$$

en introduisant les profondeurs optiques respectives

$$\boxed{\tau_{\parallel} = \kappa_{\parallel} L = n_d \Sigma_{\parallel} L = 2n_d ah Q_{\parallel} L} \quad \boxed{\tau_{\perp} = \kappa_{\perp} L = n_d \Sigma_{\perp} L = 2n_d ah Q_{\perp} L} \quad (73)$$

Expressions de $\mathcal{I}_{\parallel}(L)$ et $\mathcal{I}_{\perp}(L)$ correctes : 1 point

Expressions de $\tau_{\parallel}$ et $\tau_{\perp}$ correctes : 1 point

Q20. On lit sur la Figure 8 (panneau de gauche), que pour $x = 1$ (et en réalité pour toute valeur de x) on a $\Delta Q = Q_{\parallel} - Q_{\perp} > 0$. Par conséquent, $Q_{\parallel} > Q_{\perp}$ et donc $\tau_{\parallel} > \tau_{\perp}$, soit

$$\boxed{\tau_{\max} = \tau_{\parallel}} \quad \boxed{\tau_{\min} = \tau_{\perp}} \quad (74)$$

Identification et justification correctes : 1 point

On a donc $e^{-\tau_{\parallel}} < e^{-\tau_{\perp}}$ de sorte que $\mathcal{I}_{\parallel}(L) < \mathcal{I}_{\perp}(L)$ et la polarisation observée est perpendiculaire à l'axe des grains de poussière.

Orientation correcte et justifiée de la polarisation : 1 point

Q21. On a la fraction de polarisation comme

$$p = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{I}} = \frac{\mathcal{I}_{\perp} - \mathcal{I}_{\parallel}}{\mathcal{I}_{\perp} + \mathcal{I}_{\parallel}} \quad (75)$$

En sortie du nuage on a donc

$$\boxed{p(L) = \frac{e^{-\tau_{\perp}} - e^{-\tau_{\parallel}}}{e^{-\tau_{\perp}} + e^{-\tau_{\parallel}}} = \frac{e^{-\tau_{\min}} - e^{-\tau_{\max}}}{e^{-\tau_{\min}} + e^{-\tau_{\max}}}} \quad (76)$$

Expression de p en fonction de $\tau_{\max}$ et $\tau_{\min}$: 1 point

En introduisant $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min}$, on a

$$p(L) = \frac{1 - e^{-\Delta\tau}}{1 + e^{-\Delta\tau}} \quad (77)$$

Or, en supposant l'extinction faible, c'est-à-dire pour $0 < \tau_{\min} < \tau_{\max} \ll 1$, on a aussi $0 < \Delta\tau \ll 1$ de sorte que

$$\boxed{p(L) \approx \frac{\Delta\tau}{2}} \quad (78)$$

Approximation correcte de p : 1 point

Q22. Pour $\theta = 0$, le grain présente au rayonnement sa base circulaire, il y a donc équivalence entre les polarisations $\perp$ et $\parallel$ et donc

$$\boxed{\Delta Q = Q_{\parallel} - Q_{\perp} = 0} \quad (79)$$

Explication convaincante : 1 point

Q23. Dans le cas (1) on a des grains constamment perpendiculaires à la ligne de visée, donc

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{2}} \quad (80)$$

Dans le cas (2), il est clair que l'angle d'inclinaison est celui de rotation,

$$\boxed{\theta(t) = \phi(t)} \quad (81)$$

Deux expressions correctes : 1 point

Q24. L'axe du grain est repéré par $\vec{u} = (\cos \phi) \vec{e}_x + (\sin \phi) \vec{e}_y$, et on peut introduire un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_z)$ soit un trièdre trirectangle direct, avec $\vec{v} = -(\sin \phi) \vec{e}_x + (\cos \phi) \vec{e}_y$. Un champ électrique porté par $\vec{e}_x$ peut alors s'écrire

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \vec{e}_x = \mathcal{E} [(\cos \phi) \vec{u} - (\sin \phi) \vec{v}] \quad (82)$$

La composante selon $\vec{u}$ est parallèle à l'axe du grain et celle selon $\vec{v}$ lui est perpendiculaire. On a donc, d'après la loi de Malus, en sortie du nuage (noter que l'hypothèse de rotations en phase pour les différents grains intervient ici)

$$\mathcal{I}_x[\phi(t)] = \mathcal{I}_{\parallel}(L) (\cos \phi)^2 + \mathcal{I}_{\perp}(L) (\sin \phi)^2 \quad (83)$$

et en utilisant les résultats de **Q19**, on a

$$\boxed{\mathcal{I}_x[\phi(t)] = \frac{\mathcal{I}_0}{2} [e^{-\tau_{\parallel}} (\cos \phi)^2 + e^{-\tau_{\perp}} (\sin \phi)^2]} \quad (84)$$

Pour un champ électrique selon $\vec{e}_y$, on a, de la même manière,

$$\boxed{\mathcal{I}_y[\phi(t)] = \frac{\mathcal{I}_0}{2} [e^{-\tau_{\parallel}} (\sin \phi)^2 + e^{-\tau_{\perp}} (\cos \phi)^2]} \quad (85)$$

Expression de $\mathcal{I}_x$ correcte : 1 point

Expression de $\mathcal{I}_y$ correcte : 1 point

Justification claire ("Malus" par exemple) : 1 point

Pour déterminer la fraction de polarisation p observée en moyenne on écrit

$$\mathcal{I}_y[\phi(t)] - \mathcal{I}_x[\phi(t)] = \frac{\mathcal{I}_0}{2} (e^{-\tau_{\parallel}} - e^{-\tau_{\perp}}) [(\sin \phi)^2 - (\cos \phi)^2] \quad (86)$$

et par suite

$$p = \frac{1}{T\mathcal{I}_0} \int_0^T \{\mathcal{I}_y[\phi(t)] - \mathcal{I}_x[\phi(t)]\} dt = \frac{e^{-\tau_{\parallel}} - e^{-\tau_{\perp}}}{2T} \int_0^T \{[\sin(\Omega t)]^2 - [\cos(\Omega t)]^2\} dt \quad (87)$$

Comme on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T [\sin(\Omega t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T [\cos(\Omega t)]^2 dt = \frac{1}{2} \quad (88)$$

on en conclut que

$$\boxed{p = 0} \quad (89)$$

Résultat $p = 0$: 1 point

Justification mathématique ou par des arguments physiques de symétrie : 1 point

Q25. Ici, il faut noter que $\mathcal{I}_x$ correspond à tout instant à l'intensité observée pour un champ électrique parallèle à l'axe du grain, soit

$$\mathcal{I}_x[\phi(t)] = \mathcal{I}_{\parallel}(L) = \frac{\mathcal{I}_0}{2} e^{-\tau_{\parallel}} \quad (90)$$

et de même

$$\mathcal{I}_y[\phi(t)] = \mathcal{I}_{\perp}(L) = \frac{\mathcal{I}_0}{2} e^{-\tau_{\perp}} \quad (91)$$

Expressions de $\mathcal{I}_x$ et $\mathcal{I}_y$: 1 point

On a donc

$$p = \frac{1}{T\mathcal{I}_0} \int_0^T \{\mathcal{I}_y[\phi(t)] - \mathcal{I}_x[\phi(t)]\} dt = \frac{1}{2T} \int_0^T (e^{-\tau_{\perp}} - e^{-\tau_{\parallel}}) dt \quad (92)$$

où il convient de noter que, par rapport à la **Q19**, les profondeurs optiques $\tau_{\parallel}$ et $\tau_{\perp}$ dépendent ici de l'angle d'inclinaison θ et donc du temps puisque $\theta = \phi(t)$. On a, en supposant qu'elles sont faibles

$$p = \frac{1}{2T} \int_0^T (\tau_{\parallel} - \tau_{\perp}) dt \quad (93)$$

Remarque que les profondeurs optiques dépendent de l'angle : 1 point

Par symétrie, on peut se limiter à un quart de période, soit

$$p = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} 2n_d a h L (Q_{\parallel} - Q_{\perp}) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\pi/2} 2n_d a h L \Delta Q(\theta) \frac{T}{2\pi} d\theta \quad (94)$$

ce qui donne le résultat demandé

$$\boxed{p = \frac{2n_d a h L}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Delta Q(\theta) d\theta = n_d a h L \langle \Delta Q \rangle} \quad (95)$$

Remarque sur la symétrie : 1 point

Résultat final, si correctement démontré, puisqu'il est donné : 1 point

De ces deux dernières questions, on déduit qu'il est indispensable, pour observer une polarisation nette, que le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ ne soit pas perpendiculaire au plan du ciel, autrement dit que les grains ne tournent pas uniquement dans ce plan.

Conclusion justifiée : 1 point

Q26. Sur le panneau de gauche, on lit que l'efficacité différentielle moyenne - pour les angles Ψ faibles (tels que $\langle \Delta Q \rangle$ soit grande et donc qu'une polarisation significative apparaisse) - est maximale pour un paramètre de taille de l'ordre de $x \approx 1,2$ à $x \approx 1,4$.

Estimation de x maximisant $\langle \Delta Q \rangle$ (à 30% près) : 1 point

Sur le panneau de droite, on lit que la polarisation est maximale pour $1/\lambda \approx 1,7 \mu\text{m}^{-1}$ (soit $\lambda \approx 0,6 \mu\text{m}$). Cela doit correspondre au paramètre de taille maximisant $\langle \Delta Q \rangle$.

Estimation de λ ou $1/\lambda$ maximisant la polarisation (à 30% près) : 1 point

On en déduit une estimation de la taille des grains

$$\boxed{a \approx 0,1 \mu\text{m}} \quad (96)$$

Estimation de a (à un facteur 2 près) : 1 point

TOTAL DES POINTS DE CETTE SOUS-PARTIE : 23

B. Alignement des grains interstellaires dans un champ magnétique

Q27. On peut raisonner à partir de la **Q24** et de la **Q25**. Si les grains de poussières étaient orientés de manière aléatoire, on en aurait 1/3 tournant autour de chacun des axes $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$. Pour ces derniers, la **Q24** montre que la polarisation est nulle. Pour ceux tournant autour de $\vec{e}_y$ on a une polarisation nette parallèle à $\vec{e}_z$ d'après **Q25**, et par symétrie, pour ceux tournant autour de $\vec{e}_x$ on a une polarisation nette parallèle à $\vec{e}_z$, qui annule donc en moyenne la précédente.

Explication raisonnable : 1 point

Q28. En l'absence de couple, on a

$$I_\alpha \frac{d\Omega_\alpha}{dt} - \Omega_\beta \Omega_\gamma (I_\beta - I_\gamma) = 0 \quad I_\beta \frac{d\Omega_\beta}{dt} - \Omega_\gamma \Omega_\alpha (I_\gamma - I_\alpha) = 0 \quad I_\gamma \frac{d\Omega_\gamma}{dt} - \Omega_\alpha \Omega_\beta (I_\alpha - I_\beta) = 0 \quad (97)$$

Or, la dernière équation se simplifie du fait de l'égalité $I_\alpha = I_\beta$, soit

$$\frac{d\Omega_\gamma}{dt} = 0 \quad (98)$$

ce qui montre que Ω_γ est constante.

Démonstration correcte de la constance de Ω_γ : 1 point

On a alors, là encore en utilisant $I_\alpha = I_\beta$,

$$\frac{d\Omega_\alpha}{dt} = \Omega_\beta \Omega_\gamma \left(1 - \frac{I_\gamma}{I_\alpha}\right) = \Omega_p \Omega_\beta \quad \frac{d\Omega_\beta}{dt} = \Omega_\gamma \Omega_\alpha \left(\frac{I_\gamma}{I_\alpha} - 1\right) = -\Omega_p \Omega_\alpha \quad (99)$$

en posant

$$\boxed{\Omega_p = \Omega_\gamma \left(1 - \frac{I_\gamma}{I_\alpha}\right)} \quad (100)$$

On dérive la première équation, en notant que Ω_p est aussi une constante, et on utilise la seconde, pour écrire

$$\frac{d^2\Omega_\alpha}{dt^2} = \Omega_p \frac{d\Omega_\beta}{dt} = -\Omega_p^2 \Omega_\alpha \quad (101)$$

On a donc, en choisissant judicieusement l'origine des temps,

$$\boxed{\Omega_\alpha = A \sin(\Omega_p t)} \quad (102)$$

Ensuite on utilise la relation

$$\Omega_\beta = \frac{1}{\Omega_p} \frac{d\Omega_\alpha}{dt} \quad (103)$$

pour conclure que

$$\boxed{\Omega_\beta = A \cos(\Omega_p t)} \quad (104)$$

Démonstration correcte des expressions de Ω_α et Ω_β (données) : 2 points

Q29. L'énergie de rotation est donnée par

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_\alpha \Omega_\alpha^2 + \frac{1}{2} I_\beta \Omega_\beta^2 + \frac{1}{2} I_\gamma \Omega_\gamma^2 \quad (105)$$

et le carré du moment cinétique est lui donné par

$$\mathcal{L}^2 = (I_\alpha \Omega_\alpha)^2 + (I_\beta \Omega_\beta)^2 + (I_\gamma \Omega_\gamma)^2 \quad (106)$$

Enfin, l'angle φ est donné par la relation

$$\cos \varphi = \frac{\mathcal{L}_\gamma}{\mathcal{L}} \quad (107)$$

et donc

$$\cos^2 \varphi = \frac{(I_\gamma \Omega_\gamma)^2}{\mathcal{L}^2} \quad (108)$$

On a donc, encore en utilisant l'égalité $I_\alpha = I_\beta$,

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2I_\alpha} [I_\alpha^2 \Omega_\alpha^2 + I_\beta^2 \Omega_\beta^2 + I_\alpha I_\gamma \Omega_\gamma^2] = \frac{1}{2I_\alpha} \left[I_\alpha^2 \Omega_\alpha^2 + I_\beta^2 \Omega_\beta^2 + \frac{I_\alpha}{I_\gamma} I_\gamma^2 \Omega_\gamma^2 \right] \quad (109)$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2I_\alpha} \left[I_\alpha^2 \Omega_\alpha^2 + I_\beta^2 \Omega_\beta^2 + I_\gamma^2 \Omega_\gamma^2 + \left(\frac{I_\alpha}{I_\gamma} - 1 \right) I_\gamma^2 \Omega_\gamma^2 \right] \quad (110)$$

ce qui donne bien le résultat demandé

$$\boxed{E_{\text{rot}} = \frac{\mathcal{L}^2}{2I_\alpha} \left[1 + \left(\frac{I_\alpha}{I_\gamma} - 1 \right) \cos^2 \varphi \right]} \quad (111)$$

Démonstration correcte de l'expression donnée de E_{rot} : 2 points

La dissipation interne d'énergie fait nécessairement diminuer l'énergie cinétique de rotation. Or celle-ci ne dépend que de φ , les autres grandeurs étant constantes. Comme $I_\alpha > I_\gamma$, le préfacteur de $\cos^2 \varphi$ est positif, et l'énergie est donc minimale lorsque $\cos^2 \varphi = 0$, autrement dit, lorsque la rotation du grain se produit autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de symétrie du cylindre.

Justification claire et complète : 1 point

Q30. Le couple $\vec{\tau} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ se résume à

$$\vec{\tau} = V \left[\chi_1(\Omega) \vec{B} + \frac{\chi_2(\Omega)}{\Omega} \vec{\Omega} \wedge \vec{B} \right] \wedge \vec{B} = V \frac{\chi_2(\Omega)}{\Omega} \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{B} \right) \wedge \vec{B} \quad (112)$$

Le théorème du moment cinétique donne alors

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt} = I_\beta \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = V \frac{\chi_2(\Omega)}{\Omega} \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{B} \right) \wedge \vec{B} \quad (113)$$

On représente sur le schéma ci-après le champ magnétique, le vecteur rotation et la variation $d\vec{\Omega}$ de celui-ci sous l'effet du couple, sachant que $\chi_2(\Omega) > 0$ et $I_\beta > 0$.

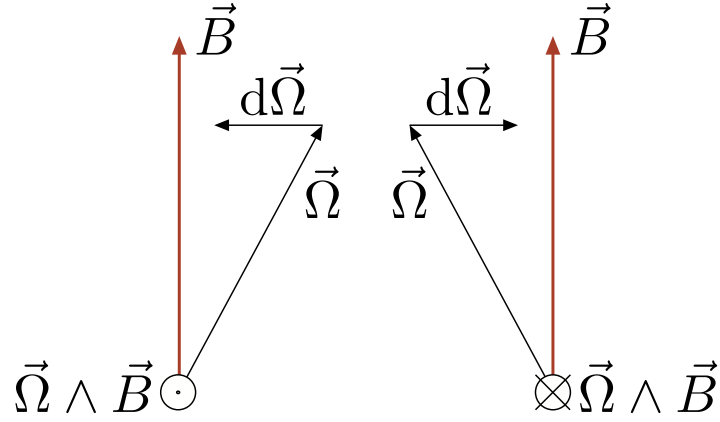


FIGURE 1 – Schéma justifiant l’alignement du vecteur rotation sur le champ magnétique.

Explication convaincante et complète (incluant le TMC) : 2 points

Q31. La variation d’énergie cinétique de rotation s’écrit

$$\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = \vec{\tau} \cdot \vec{\Omega} = \left[V \frac{\chi_2(\Omega)}{\Omega} (\vec{\Omega} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \right] \cdot \vec{\Omega} \quad (114)$$

On utilise alors la formule du double produit vectoriel

$$\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = -V \frac{\chi_2(\Omega)}{\Omega} \left[\vec{B} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{B}) \right] \cdot \vec{\Omega} = -V \frac{\chi_2(\Omega)}{\Omega} \left[B^2 \vec{\Omega} - (\vec{B} \cdot \vec{\Omega}) \vec{B} \right] \cdot \vec{\Omega} \quad (115)$$

ce qui donne

$$\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = -V \frac{\chi_2(\Omega)}{\Omega} \left[(B\Omega)^2 - (\vec{B} \cdot \vec{\Omega})^2 \right] = -V \frac{\chi_2(\Omega)}{\Omega} (B\Omega)^2 (1 - \cos^2 \psi) \quad (116)$$

On reconnaît alors le carré du module de $\vec{\Omega} \wedge \vec{B}$, puisque

$$(B\Omega)^2 (1 - \cos^2 \psi) = (B\Omega)^2 \sin^2 \psi = \left| \vec{\Omega} \wedge \vec{B} \right|^2 \quad (117)$$

et donc

$$\boxed{\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = -V \frac{\chi_2(\Omega)}{\Omega} \left| \vec{\Omega} \wedge \vec{B} \right|^2} \quad (118)$$

À l'équilibre, l'énergie de rotation doit être minimale, donc sa variation est nulle, et cela correspond donc à $\vec{\Omega} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, ce qui signifie que le vecteur rotation du grain est aligné sur le champ magnétique.

Obtention de l'expression correcte de la dérivée temporelle de E_{rot} : 2 points

Conclusion : 1 point

Q32. La lumière d'une étoile n'est pas polarisée. Lorsqu'elle traverse un nuage de poussières elle n'en acquiert une que si les grains sont en moyenne alignés, d'après la **Q27**. L'alignement se fait de manière que l'axe de rotation du grain est parallèle au champ magnétique d'après la **Q31**. La direction de polarisation observée est alors parallèle au champ magnétique, d'après la **Q25**. La polarisation est nulle si la rotation se fait dans le plan du ciel, d'après la **Q24**, c'est-à-dire si le champ magnétique n'a pas de composante dans le plan du ciel.

Direction de polarisation identique à celle du vecteur rotation du grain : 1 point

Direction de polarisation identique à celle du champ magnétique : 1 point

Pas de polarisation si le champ magnétique est perpendiculaire au plan du ciel : 1 point

Direction de polarisation identique à celle de la projection du champ magnétique dans le plan du ciel : 1 point

TOTAL DES POINT DE CETTE SOUS-PARTIE : 16
--

TOTAL DES POINT DE CETTE PARTIE : 39

III. Champ magnétique et dynamique interstellaire

A. Pression et tension magnétiques

Q33. La loi d'Ohm locale dans le référentiel propre du fluide s'écrit

$$\vec{j}' = \sigma \vec{E}' = \sigma \left[\gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) - (\gamma - 1) \left(\vec{E} \cdot \vec{u} \right) \vec{u} \right] \quad (119)$$

d'après la loi de transformation du champ électrique (la vitesse $\vec{v}$ est bien celle du référentiel propre $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, et $\vec{u} = \vec{v}/v$). Or le vecteur densité de courant ne peut être infini, donc dans la

limite $\sigma \rightarrow \infty$, on doit avoir

$$\gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) - (\gamma - 1) \left(\vec{E} \cdot \vec{u} \right) \vec{u} = \vec{0} \quad (120)$$

Or on suppose les mouvements non-relativistes $\gamma \approx 1$, donc on a finalement

$$\boxed{\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}} \quad (121)$$

Justification raisonnable du résultat donné : 1 point

On utilise alors l'équation de Maxwell-Faraday pour écrire l'équation d'induction

$$\boxed{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{B} \right)} \quad (122)$$

Justification par Maxwell-Faraday du résultat donné : 1 point

Q34. On utilise Maxwell-Ampère

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (123)$$

On a alors introduisant une échelle caractéristique ℓ_0 et un temps caractéristique t_0 de l'écoulement, et en ordre de grandeur

$$\frac{|\vec{\nabla} \wedge \vec{B}|}{\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right|} \sim \frac{\frac{B}{\ell_0}}{\frac{E}{c^2 t_0}} \quad (124)$$

Le résultat de la **Q33** et la relation $v \sim \ell_0/t_0$ donnent alors

$$\boxed{\frac{|\vec{\nabla} \wedge \vec{B}|}{\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right|} \sim \left(\frac{c}{v} \right)^2 \gg 1} \quad (125)$$

On en déduit une approximation de la densité volumique de courant

$$\boxed{\vec{j} = \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0}} \quad (126)$$

Justification correcte de l'approximation : 1 point

Expression de $\vec{j}$: 1 point

Q35. On a la force de Lorentz par unité de volume

$$\vec{f} = n \times (q\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (127)$$

Or on voit dans le formulaire qu'on a

$$\vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{u} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \quad (128)$$

qu'on peut adapter ici en prenant $\vec{u} = \vec{v} = \vec{B}$

$$\vec{\nabla} (B^2) = 2 \left[(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \right] \quad (129)$$

On a donc

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2} \right) \quad (130)$$

ce qui donne le résultat demandé

$$\boxed{\vec{f} = -\vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}} \quad (131)$$

Démonstration correcte : 2 points

Q36. En écrivant l'équation d'Euler, on a alors

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (132)$$

On peut donc combiner les deux termes de gradient apparaissant au membre de droite, selon

$$-\vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (133)$$

Il apparaît donc que la quantité

$$P_m = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (134)$$

se comporte comme le terme de pression, ce qui justifie son nom de pression magnétique.

Justification raisonnable : 1 point

Q37. Le flux magnétique au travers de $\mathcal{S}$ est constant et s'écrit

$$\Phi = \pi R^2 B = \pi (R')^2 B' \quad (135)$$

On a donc

$$\boxed{B' = B \left(\frac{R}{R'} \right)^2} \quad (136)$$

Expression de B' correctement justifiée : 1 point

La pression magnétique, en B^2 , va donc augmenter, donc le système résiste à la contraction.

Explication raisonnable : 1 point

Q38. Au niveau $z = 0$, le champ magnétique s'écrit $\vec{B} = B\vec{u} = B\vec{e}_z$ avec $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire de l'axe z . Le terme en question s'écrit donc

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} = \frac{B}{\mu_0} \frac{dB\vec{u}}{dz} \quad (137)$$

Or on note que l'intensité du champ magnétique reste uniforme, donc finalement

$$\boxed{\frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{B} = \frac{B^2}{\mu_0} \frac{d\vec{u}}{dz}} \quad (138)$$

Expression de la force de tension magnétique : 1 point

Sur le schéma, on note que $d\vec{u}/dz$ est orienté vers la gauche, et de manière générale il serait orienté vers l'intérieur de la courbure des lignes de champ. Comme $B^2/\mu_0 > 0$, la force est donc dirigée dans ce sens, et elle a pour effet de tenter de diminuer cette courbure, et de restaurer des lignes de champ "droites".

Discussion physique de l'effet de la force : 2 points

TOTAL DES POINTS DE CETTE SOUS-PARTIE : 12

B. Effondrement gravitationnel et champ magnétique

Q39. On a l'intégrale demandée sous la forme

$$E_g(R) = - \iiint_V \frac{Gm(r)}{r} \rho_0 dV \quad (139)$$

Expression correcte de l'intégrale : 1 point

On utilise la symétrie sphérique et le fait que la densité est uniforme

$$E_g(R) = - \int_0^R \frac{G}{r} \times \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3 \times \rho_0 \times 4\pi r^2 dr = -G \frac{(4\pi \rho_0)^2}{3} \int_0^R r^4 dr = -G \frac{(4\pi \rho_0)^2}{3} \times \frac{R^5}{5} \quad (140)$$

On trouve alors

$$E_g(R) = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (141)$$

Expression correcte de E_g : 1 point

Q40. On a l'énergie magnétique

$$E_m = 2P_m V = \frac{B^2}{\mu_0} \times \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3\mu_0} \frac{B^2 R^4}{R} \quad (142)$$

Or le flux magnétique est $\Phi = B\mathcal{S} = \pi B R^2$, donc

$$E_m = \frac{4}{3\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{R} \quad (143)$$

Expression correcte de E_m : 1 point

Q41. Comme on suppose que le champ magnétique fournit l'essentiel du support contre la gravité, on a

$$2E_c + E_g + E_m \approx E_g + E_m \quad (144)$$

Il y a donc effondrement si

$$E_g + E_m < 0 \quad (145)$$

En insérant les expressions trouvées plus haut, cette condition s'écrit

$$-\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} + \frac{4}{3\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{R} < 0 \quad (146)$$

On voit que cela ne dépend pas du rayon R et que la condition d'effondrement s'écrit

$$3GM^2 > \frac{20}{3\pi\mu_0}\Phi^2 \quad (147)$$

ce qui est équivalent au fait que le rapport masse-flux soit supérieur au rapport critique

$$\boxed{\frac{M}{\Phi} > \sqrt{\frac{20}{9\pi\mu_0 G}}} \quad (148)$$

Raisonnement correct pour obtenir le résultat donné : 1 point

Q42. Les particules neutres, majoritaires, constituent l'essentiel de la masse, mais elles ne sont pas attachées aux lignes de champ magnétique, donc pas soumises à la pression magnétique (puisque celle-ci est issue de la force de Lorentz, qui ne s'applique qu'aux particules chargées). Pour elles, seule la gravitation joue ici, donc il y a contraction du nuage de particules neutres. La section $\mathcal{S}$ diminue, tandis que le champ B reste a priori constant. On a donc une diminution du flux magnétique Φ avec le temps.

Discussion raisonnablement convaincante : 2 points

Q43. Le rapport masse-flux augmente avec le temps, puisque M est constante et que Φ diminue. Pour un nuage initialement stable, c'est-à-dire avec M/Φ inférieur à la valeur critique, il peut arriver que ce rapport atteigne ou dépasse la valeur critique, donc le nuage s'effondre.

Discussion raisonnablement convaincante : 1 point

Q44. À température nulle, on a $E_k = 0$, et sans mouvement turbulent, on a $E_t = 0$. L'énergie cinétique se réduit donc à l'énergie cinétique de rotation, $E_c = E_r$. Par définition de celle-ci on a

$$E_c = E_r = \frac{1}{2}I_s\Omega^2 \quad (149)$$

avec I_s le moment d'inertie d'une sphère homogène de masse M et de rayon R autour d'un axe de symétrie, soit

$$I_s = \frac{2}{5}MR^2 \quad (150)$$

On a donc

$$\boxed{E_c = \frac{1}{5}MR^2\Omega^2} \quad (151)$$

Justification de la nullité de E_k et E_t : 1 point

Expression correcte de E_c : 1 point

Q45. Il n'y a pas de couple exercé, donc le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}$ du nuage est conservé.
Justification de la conservation du moment cinétique : 1 point

On en déduit que $I_s \Omega$ est une constante, soit $R^2 \Omega = \text{C}^{\text{te}}$ et donc

$$\boxed{\Omega = \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2} \quad (152)$$

Expression de Ω : 1 point

Le rapport $E_c/|E_g|$ s'écrit alors

$$\frac{E_c}{|E_g|} = \frac{\frac{1}{5} M R^2 \Omega^2}{\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}} = \frac{1}{3} \frac{R^3 \Omega^2}{G M} = \frac{1}{3} \frac{R^3 \Omega_0^2}{G M} \left(\frac{R_0}{R} \right)^4 = \frac{1}{3} \frac{R_0^3 \Omega_0^2}{G M} \left(\frac{R_0}{R} \right) \quad (153)$$

On voit donc que

$$\boxed{\frac{E_c}{|E_g|} \propto \frac{1}{R}} \quad (154)$$

Rapport inversement proportionnel à R : 1 point

Q46. À l'équilibre on a $2E_c + E_g = 0$ et donc

$$\frac{E_c}{|E_g|} = \frac{1}{2} = \left(\frac{E_c}{|E_g|} \right)_0 \times \frac{R_0}{R_{\text{eq}}} \quad (155)$$

On a donc

$$R_{\text{eq}} = 2 R_0 \left(\frac{E_c}{|E_g|} \right)_0 \quad (156)$$

Numériquement, on trouve donc

$$\boxed{R_{\text{eq}} = 2 \times 10^{-3} \text{ pc}} \quad (157)$$

Ce rayon d'équilibre, exprimé en unités de rayon solaire, vaut

$$R_{\text{eq}} \approx 8,6 \times 10^4 R_{\odot} \quad (158)$$

On voit que la contraction s'arrête, du fait de la barrière centrifuge, alors qu'on est loin d'avoir pu concentrer toute la masse dans un volume suffisamment petit. Cette barrière est atteinte parce qu'il y a conservation du moment cinétique. Il faut pouvoir évacuer celui-ci !

Valeur numérique de R_{eq} : 1 point

Discussion physique raisonnable de la barrière centrifuge : 2 points

Q47. Les particules ionisées sont attachées aux lignes de champ magnétiques. Inversement, lorsque le cœur tourne, il entraîne avec lui les lignes de champ qui le traversent. Ces lignes de champ acquièrent une courbure dans l'enveloppe, que la force de tension magnétique cherche à contrer. On peut aussi dire que les lignes de champ, mises en mouvement dans l'enveloppe, y entraînent les particules ionisées, provoquant l'apparition d'une rotation de cette partie de l'enveloppe.

Discussion physiquement raisonnable : 2 points

Q48. La propagation de l'onde d'Alfvén dans l'enveloppe se faisant à la vitesse v_A , le volume de l'enveloppe entraînée en co-rotation avec le cœur au bout d'un temps t est

$$V_{\text{ext}} = 2 \times \pi R_{\text{eq}}^2 \times v_A t \quad (159)$$

le facteur 2 provenant du fait qu'il y a deux côtés (supérieur et inférieur au cœur). La masse cherchée est donc

$$M_{\text{ext}} = 2\pi\rho_{\text{ext}}R_{\text{eq}}^2 v_A t \quad (160)$$

Expression de M_{ext} correcte avec une justification : 2 points

La conservation du moment cinétique total doit maintenant tenir compte du fait que cette masse d'enveloppe se met en rotation. On a donc

$$(I_{\text{ext}} + I_{\text{core}}) \Omega = I_{\text{core}} \Omega_{\text{eq}} \quad (161)$$

où I_{core} et I_{ext} sont respectivement les moments d'inertie du cœur et de la partie d'enveloppe en co-rotation, par rapport à l'axe de rotation, soit

$$I_{\text{core}} = \frac{2}{5} M R_{\text{eq}}^2 \quad I_{\text{ext}} = \frac{1}{2} M_{\text{ext}} R_{\text{eq}}^2 \quad (162)$$

On a donc

$$\left(\frac{2}{5} M + \frac{1}{2} M_{\text{ext}} \right) R_{\text{eq}}^2 \Omega = \frac{2}{5} M R_{\text{eq}}^2 \Omega_{\text{eq}} \quad (163)$$

soit, en isolant la vitesse de rotation à l'instant t

$$\Omega(t) = \Omega_{\text{eq}} \frac{\frac{2}{5} M}{\frac{2}{5} M + \frac{1}{2} M_{\text{ext}}} = \frac{\Omega_{\text{eq}}}{1 + \frac{5}{4} \frac{M_{\text{ext}}}{M}} = \frac{\Omega_{\text{eq}}}{1 + \frac{5}{4} \times \frac{2\pi\rho_{\text{ext}}R_{\text{eq}}^2 v_A t}{M}} \quad (164)$$

On obtient donc une loi comme annoncé

$$\Omega(t) = \frac{\Omega_{\text{eq}}}{1 + \frac{t}{t_B}} \quad (165)$$

avec un temps caractéristique

$$t_B = \frac{4M}{10\pi\rho_{\text{ext}}R_{\text{eq}}^2 v_A} \quad (166)$$

On voit que Ω décroît avec le temps, de sorte que le moment cinétique du cœur seul décroît également. On en déduit que l'énergie cinétique de rotation décroît, tandis que l'énergie gravitationnelle reste constante. On passe donc de l'équilibre $2E_c + E_g = 0$ à une situation où $2E_c + E_g < 0$, l'effondrement peut donc se poursuivre.

Raisonnement correct pour obtenir la forme de la loi $\Omega(t)$: 1 point

Expression correcte de t_B : 1 point

Conclusion physique : 1 point

TOTAL DES POINT DE CETTE SOUS-PARTIE : 22

TOTAL DES POINT DE CETTE PARTIE : 34

TOTAL DES POINT DU PROBLEME : 119

★ ★
★