

I. Le verre, milieu de propagation des ondes électromagnétiques

- 1) Quatre équations de Maxwell dans le vide :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{Maxwell-Thomson})$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (\text{Maxwell-Gauss})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell-Faraday})$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell-Ampère})$$

Que l'on peut aussi écrire en utilisant l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$

Par combinaison (rot appliqué à M. Faraday par exemple) on obtient immédiatement l'équation de D'Alembert pour $\vec{E}$: $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$. Idem en $\vec{B}$.

On obtient ainsi la célérité de la lumière dans le vide $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

On écrit alors le champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$.

En l'injectant dans l'équation de D'Alembert, on a immédiatement $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

- 2) Un **diélectrique** est un milieu isolant (dans lequel les charges libres n'existent pas, les charges y sont liées)

Un milieu est **linéaire** si la réponse à un forçage est proportionnelle à ce forçage. Dans le cas présent, un diélectrique est linéaire si la polarisation $\vec{P}$ est proportionnelle au champ électrique $\vec{E}$.

Un milieu linéaire est **homogène** si ses propriétés ne dépendent pas du point M.

Il est **isotrope** si il a les mêmes propriétés dans toutes les directions.

Donc ici, pour le verre, le vecteur polarisation volumique est scalairement proportionnelle à $\vec{E}$, la matrice $[\chi]$ est scalaire.

- 3) La taille caractéristique d'un atome est 0,1 nm, les longueurs d'ondes dans le visible sont comprises entre 400 et 800 nm et plus généralement, dans la gamme de travail annoncée (UV - proche IR), $\lambda \in [50 \text{ nm} ; 2 \mu\text{m}]$, on a bien $\lambda \gg \text{taille caractéristique}$, et donc le champ électrique de l'onde est raisonnablement uniforme dans la zone de présence d'un électron autour de l'atome.

Pour un électron non relativiste, on compare la composante magnétique de la force de Lorentz à la composante électrique : $\frac{\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \approx \frac{v}{c} \ll 1$ en ordre de grandeur, d'après la structure locale d'onde plane (on établira plus bas une relation de dispersion $k = \frac{n\omega}{c}$, n voisin de 1,5 et Maxwell Faraday pour l'onde électromagnétique plane fournit en OG : $k \cdot E = \omega B$).

On peut effectivement conclure à la prédominance de la composante électrique dans la force de Lorentz.

- 4) Le théorème de la résultante cinétique sur l'électron non relativiste s'écrit (le poids est bien sûr totalement négligeable devant toutes les autres actions) :

$$m_e \vec{a} = -K \cdot \vec{r} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v} + q_e \vec{E}$$

Ce qui donne bien la forme attendue : $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{q_e}{m_e} \vec{E}$, en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m_e}}$ pulsation propre et $Q = \tau \omega_0$ facteur de qualité

- 5) Le moment dipolaire élémentaire induit est $\vec{p} = q_e \vec{r}$, et la polarisation macroscopique par unité de volume dans le dlhi est $\vec{P} = N \vec{p}$.

On obtient alors en RSF l'équation en $(j\omega)^2 \underline{\vec{r}} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{\vec{r}} + \omega_0^2 \underline{\vec{r}} = \frac{q_e}{m_e} \underline{\vec{E}}$, ce qui mène bien à

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \frac{\chi_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \underline{\vec{E}}, \text{ avec } \boxed{\chi_0 = \frac{Nq_e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega_0^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \text{ la susceptibilité statique.}$$

Ainsi $\boxed{\chi_e = \frac{\chi_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ est la susceptibilité diélectrique du milieu.

6) Les 4 équations de Maxwell dans le verre deviennent alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\vec{B}} &= 0 & (\text{Maxwell-Thomson}) & \quad \operatorname{div} \underline{\vec{E}} = \frac{\rho_{pol}}{\varepsilon_0} & (\text{Maxwell-Gauss}) \\ \operatorname{rot} \underline{\vec{E}} &= -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} & (\text{Maxwell-Faraday}) & \quad \operatorname{rot} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left(\underline{\vec{J}}_{pol} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \right) & (\text{Maxwell-Ampère}) \end{aligned}$$

Avec $\rho_{pol} = -\operatorname{div} \underline{\vec{P}}$ et $\underline{\vec{J}}_{pol} = \frac{\partial \underline{\vec{P}}}{\partial t}$.

Le verre est supposé dlhi, $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi_e} \underline{\vec{E}}$, donc en remplaçant on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\vec{B}} &= 0 & \operatorname{div} \left((1 + \underline{\chi_e}) \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} \right) &= 0 \\ \operatorname{rot} \underline{\vec{E}} &= -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} & \operatorname{rot} \underline{\vec{B}} &= \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \underline{\chi_e}) \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \end{aligned}$$

Il s'agit des mêmes équations que dans le vide, en remplaçant ε_0 par $\varepsilon_0 \underline{\varepsilon_r}$ avec $\boxed{\underline{\varepsilon_r} = (1 + \underline{\chi_e})}$ la permittivité diélectrique relative (complexe) du milieu, qui est fonction de la pulsation ω , et qui est sans dimension.

7) On obtient de la même façon qu'à la question 1) : $\Delta \underline{\vec{E}} - \frac{\underline{\varepsilon_r}}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$ et $\Delta \underline{\vec{B}} - \frac{\underline{\varepsilon_r}}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{B}}}{\partial t^2} = \vec{0}$

On a donc la relation de dispersion $\boxed{k^2(\omega) = \underline{\varepsilon_r} \frac{\omega^2}{c^2}}$

8) L'indice optique n est défini par la relation $\boxed{k^2(\omega) = \underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2}}$, donc par identification $\boxed{n^2 = \underline{\varepsilon_r}}$.

On ne souhaite pas ici une résolution complète mais puisque $\underline{\chi_e}$ est complexe, $\underline{\varepsilon_r}$ aussi, donc $\underline{n}$ aussi. On pose $\underline{n} = n_1 - jn_2$, cad la partie imaginaire de $\underline{n}$ négative, car l'onde s'atténue au cours de sa propagation.

On écrit alors le champ électrique $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-n_2 \frac{\omega}{c} \vec{u} \cdot \vec{r}} \exp \left(j \left(\omega t - n_1 \frac{\omega}{c} \vec{u} \cdot \vec{r} \right) \right)$

Soit pour une direction de propagation $\vec{u}_z$: $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-n_2 \frac{\omega}{c} z} \exp \left(j \left(\omega t - n_1 \frac{\omega}{c} z \right) \right)$.

On reconnaît :

- un terme de propagation $\exp \left(j \left(\omega t - n_1 \frac{\omega}{c} z \right) \right)$, avec la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{c}{n_1}$; n_1 est

l'indice de réfraction du verre. n_1 dépend manifestement de ω (même si la résolution complète n'a pas été faite), donc v_φ aussi : le verre est un milieu dispersif.

- un terme d'atténuation dans le sens de la propagation $e^{-n_2 \frac{\omega}{c} z}$; n_2 est **l'indice d'extinction** du verre. On peut adopter pour ce terme l'écriture $e^{-n_2 \frac{\omega}{c} z} = e^{-\frac{z}{\delta}}$ avec $\delta = \frac{c}{n_2 \omega}$ longueur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans le milieu.

9) Les deux courbes fournissent n_1 et n_2 en fonction de la longueur d'onde λ .

Le pic de résonance de n_2 (donc le pic d'absorption) est positionné sur $\lambda = 100$ nm, dans l'UV. En dehors de cette résonance d'absorption (dont la largeur est $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$, évident vu la forme canonique mais ce n'est pas demandé dans l'énoncé), n_2 est nul et n_1 réel positif : il y a propagation sans atténuation pour les radiations du visible, le verre paraît transparent à la lumière du jour (et aux proches IR).

10) En dehors de cette résonance d'absorption dans les UV, n_2 est absolument négligeable devant n_1 , l'indice du verre est alors n_1 réel positif. L'annulation de la partie imaginaire de $\underline{n}$ correspond à $Q \rightarrow \infty$, c'est-à-dire à une atténuation nulle.

On a alors $\underline{n}^2 = \underline{\epsilon}_r = 1 + \frac{\chi_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ qui se simplifie en $n^2 = 1 + \frac{\chi_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Pour les longueurs d'ondes du visible, $\lambda \gg \lambda_0 = 100 \text{ nm}$ donc $\frac{\lambda}{\lambda_0} \gg 1$ et par suite $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1$.

On peut donc faire un développement limité en $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ de l'expression de $n = \sqrt{1 + \frac{\chi_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$:

$n \cong \sqrt{1 + \chi_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$ ce qui s'écrit en longueur d'onde $n = \sqrt{1 + \chi_0 \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)}$. D'où :

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{(1 + \chi_0) + \chi_0 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} \\ n &= \sqrt{1 + \chi_0} \sqrt{1 + \frac{\chi_0}{1 + \chi_0} \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} \\ n &= \sqrt{1 + \chi_0} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_0}{1 + \chi_0} \right) \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right] \\ n &= \sqrt{1 + \chi_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_0}{\sqrt{1 + \chi_0}} \right) \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la loi de Cauchy de description de la dispersion dans les verres utilisés en optique :

$n = n_0 + \frac{B}{\lambda^2}$, en identifiant $n_0 = \sqrt{1 + \chi_0}$ et $B = \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_0}{\sqrt{1 + \chi_0}} \right) \lambda_0^2$

11) Un goniomètre mesure un angle.

I = lunette auto-collimatrice, permet d'observer (pour l'œil qui n'accommode pas, après réglage ad hoc) la lumière venant de l'infini, dans toutes les directions. Pour ce faire, elle tourne sur 360° en gardant son axe optique strictement parallèle au plan de la platine.

Pour régler cette lunette, on règle d'abord l'oculaire à la vision de l'observateur (qui n'accommode pas), c'est-à-dire que l'on superpose le plan du réticule interne à la lunette avec le plan focal objet de l'oculaire (pour un œil « normal »). Puis on règle l'objectif par auto collimation : on superpose alors le plan du réticule interne à la lunette avec le plan focal image de l'oculaire.

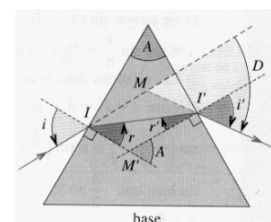
II = Collimateur, permet en positionnant la source spectrale devant la fente de largeur réglable, d'obtenir de celle-ci un faisceau de lumière parallèle (fente au foyer objet de l'objectif du collimateur).

Pour le régler, on se sert de la lunette préalablement réglée à l'infini : lorsque la fente éclairée du collimateur est nette, le collimateur est alors bien réglé.

12) Angle au sommet : $A = r + r'$

Déviation : $D = i + i' - A$

Réfractions : $\sin i = n. \sin r$ et $\sin i' = n. \sin r'$



13) Intérêt du minimum de déviation: une seule mesure à faire (pas de mesure d'incidence), et précision maximale.

14) Dans la suite on la majore raisonnablement pour aboutir à $\frac{\Delta n}{n} = 10^{-3}$, ce qui permet 4 CS pour n .

15) La ligne 17 détermine la droite de tendance (polynôme d'ordre 1) de la série de mesures expérimentale.

Les variables `res`, `InvI2` et `N` sont des listes contenant respectivement les valeurs des résultats de la régression linéaire (`res`) calculés pour une abscisse `InvI2` qui est l'inverse de la longueur d'onde au carré et pour une ordonnée `N` qui est l'indice optique.

16) La droite de tendance laisse des points expérimentaux au-dessus et au-dessous (interpolation par méthode des moindres carrés). Les écarts calculés sont donc positifs et négatifs.

L'ordre de grandeur des écarts est bien 10^{-3} , en accord avec l'incertitude calculée.

→ Le modèle linéaire peut être validé.

17) La simulation Monte Carlo consiste à tirer aléatoirement (avec une loi de distribution uniforme, ligne 56) des valeurs pour chaque point expérimental de $n(\lambda)$ dans l'intervalle $[n - \Delta n, n + \Delta n]$ et, à chaque jeu de 6 points expérimentaux, à déterminer les paramètres (pente et ordonnée à l'origine) que l'on place dans les listes `ValB` et `Valn0`.

On itère l'opération un grand nombre de fois et on obtient les histogrammes de fréquences de ces valeurs de `B` et de `n0` l'ordonnée à l'origine.

18) Les valeurs de `n0` et de `B` les plus probables sont les maxima des histogrammes, on lit :

$$n_0 = 1,751 \text{ (sans unité)}$$

$$B = 0,01845 \mu\text{m}^2$$

Ces deux valeurs sont en accord avec la modélisation par la droite de tendance des 6 points expérimentaux.

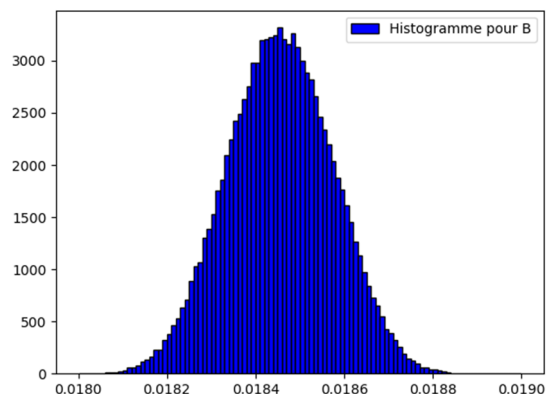
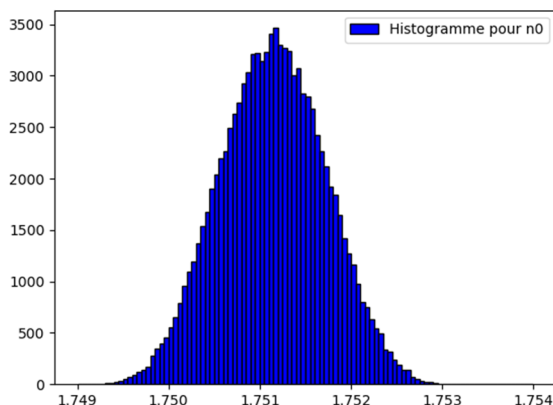
Les écarts-types sur ces valeurs (incertitude type donc) sont les $\frac{1}{2}$ largeurs à 69% du maximum, (et on accepte sans peine $\frac{1}{2}$ largeur à mi-hauteur), ce qui fournit bien le même ordre de grandeur :

$$\Delta n_0 = 5 \times 10^{-3}$$

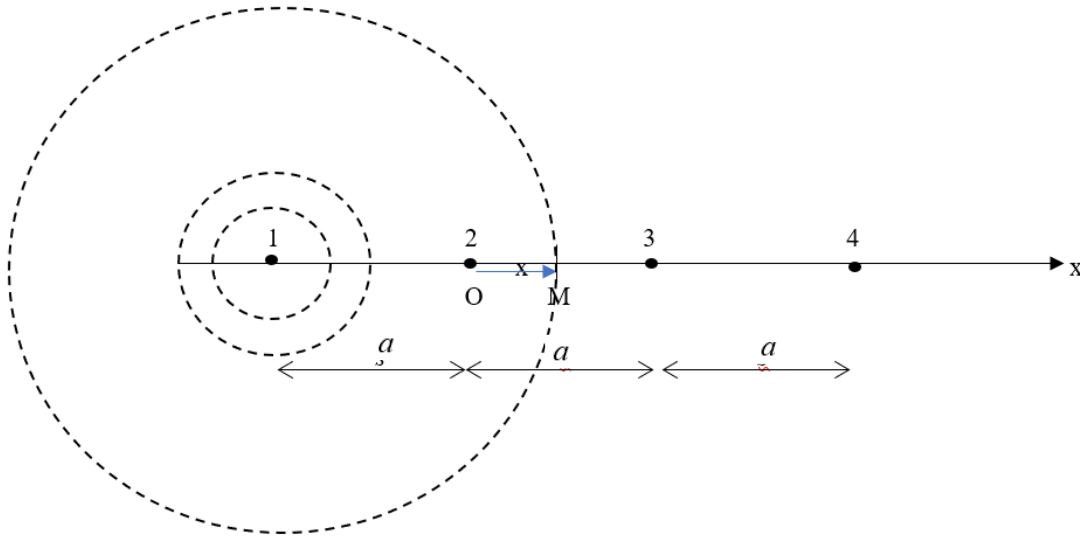
$$\Delta B = 5 \times 10^{-3} \text{ en } \mu\text{m}^2$$

Ici le nombre d'itérations (`NbreIterations`, ligne 41) est égal à 10 000.

Si on augmente d'un facteur 10 le nombre d'itérations, on observera avant tout une diminution du bruit des histogrammes, les valeurs centrales restant les mêmes. On peut attendre une diminution de la largeur caractéristiques des histogrammes, en $1/\sqrt{\text{NbreIterations}}$:



- 19) Soit le champ électrique $\vec{E}(M)$ au point M, situé sur l'axe Ox contenant les 4 points, à la distance x de la pointe 3 : c'est la superposition du champ électrique $\vec{E}_1(M)$ créé par la pointe 1 et du champ $\vec{E}_4(M)$ créé par la pointe 4.



D'après la loi d'Ohm locale $\vec{j}_1(M) = \gamma \vec{E}_1(M)$.

Dans le cadre de l'ARQP, on écrit la conservation du courant électrique, sachant que les surfaces équipotentielles sont des cylindres de rayon r_1 et d'épaisseur e_0 autour de la pointe 1 : $I = j_1(r_1) \times 2\pi r_1 e_0$

Comme le champ électrique $\vec{E}_1(M)$ est radial (orthogonal aux équipotentielles) et que $r_1 = a+x$, on obtient $\vec{E}_1(M) = \frac{I}{\gamma 2\pi(a+x)e_0} \vec{e}_x$.

De la même façon, $\vec{E}_4(M) = \frac{-I}{\gamma 2\pi(2a-x)e_0} (-\vec{e}_x)$

On obtient ainsi $\vec{E}(M) = \frac{I}{\gamma 2\pi e_0} \vec{e}_x \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{2a-x} \right]$

On fait circuler le champ électrique entre les points 2 et 3 pour accéder à la différence de potentiel $U = V_2 - V_3$:

$$V_2 - V_3 = \int_{x=0}^{x=a} \frac{I}{\gamma 2\pi e_0} \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{2a-x} \right] dx = \frac{I}{\gamma 2\pi e_0} [\ln(a+x) - \ln(2a-x)]_{x=0}^{x=a} = \frac{I}{\gamma 2\pi e_0} 2 \ln 2$$

- 20) Si la distance a augmente, la densité de courant entre les points 2 et 3 va diminuer, mais la différence de potentielle aussi, de telle sorte que le rapport U / I , lui, va rester constant.

- 21) D'après la figure 10, la capacité C est environ égale à 10 mF/cm^2 (pente de la courbe) multiplié par $S = 10 \text{ cm}^2$, soit $C = 100 \text{ mF} = 0,1 \text{ F}$.

Si on s'intéresse au temps caractéristique τ de coloration et de décoloration de la cellule et qu'on l'assimile au temps caractéristique de charge et de décharge d'un circuit RC série, on lit sur la Figure 9, $\tau \approx 10 \text{ s}$.

Soit, avec $\tau = RC$, une valeur de résistance $R = 100 \Omega$.

Etant donné la valeur de la résistance $R_e = 4 \Omega \ll R$ on en déduit que l'ordre de grandeur de la résistance ionique R_i vaut environ 100Ω pour cet échantillon.

Dans la réalité la surface des vitrages est bien plus importante (de l'ordre de 1 m^2) donc le temps de commutation est plus important car les capacités et résistances ioniques sont de ce fait plus conséquents, et la vitre prend plus de temps à se teinter de façon uniforme

II. Isolation phonique des vitrages

- 22) Approximation acoustique : on envisage des écoulements de perturbation au voisinage de l'équilibre du fluide : l'élongation sonore est petite devant la longueur d'onde. C'est donc une approximation de linéarisation de la mécanique des fluides.

Equation d'Euler pour un fluide parfait: $\rho_{tot} \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad} P_{tot} + \rho_{tot} \vec{g}$

Equation de continuité (conservation de la masse) $\frac{D\rho_{tot}}{Dt} + \rho_{tot} div \vec{v} = 0$

Linéarisation :

Il faut comparer dans la dérivation particulaire, les termes $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}$

En ordre de grandeur pour une OPPH, $\frac{\partial}{\partial t} \cong \frac{1}{T}$ et $\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad} \cong \frac{v}{\lambda}$. Comparer ces deux termes c'est

former leur quotient : $\frac{\frac{\partial}{\partial t}}{\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}} \approx \frac{\frac{1}{T}}{\frac{v}{\lambda}} = \frac{\lambda}{vT} = \frac{c_s}{v}$.

Dans l'hypothèse acoustique, ce quotient est bien $\gg 1$ et on a bien : $\frac{\lambda}{vT} = \frac{\lambda}{\text{élongation}} \gg 1$.

Les trois équations linéarisés (en comptant celle donnée dans l'énoncé) s'écrivent donc :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad} p \quad (i)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 div \vec{v} = 0 \quad (ii)$$

$$\rho = \rho_0 \chi_s p \quad (iii)$$

- 23) Dans un gaz parfait, l'équation d'état fournit : $\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{RT}{M}$, et la loi de Laplace pour l'isentropie du

GP fournit $P \cdot \rho^{-\gamma} = c^{ste}$ soit, par différentiation logarithmique, $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$.

Ainsi la compressibilité adiabatique s'écrit $\chi_s = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{\gamma P} = \frac{1}{\gamma P}$.

Finalement, $c_s = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$. Application numérique $c_s = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,31 \times 293}{29 \times 10^{-3}}} = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

- 24) On a linéarisé les équations qui gouvernent le problème : d'après la théorie de Fourier, toute onde acoustique peut donc se décomposer en superposition discrète ou continue d'OPPH : il est donc pertinent d'étudier celle-ci comme élément de base de toute onde.

- 25) Réécrivons l'équation d'Euler linéarisée pour une OPPH, en notation complexe :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z. \text{ L'onde acoustique est longitudinale, } \vec{v} = v \cdot \vec{u}_z \text{ soit } \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \text{ puis pour une}$$

onde écrite de dépendance spatio-temporelle en $\exp\left(j\left(\omega t - \frac{\omega}{c_s} z\right)\right)$

$$\rho_0 j \omega v = -\left(-j \omega \frac{\omega}{c_s}\right) p$$

Ce qui permet de définir l'impédance acoustique : $Z_c = \frac{p}{v} = \rho_0 c_s$

AN : dans l'air, $\frac{MP_0}{RT} = \rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, d'où $Z_c = \rho_0 c_s = 410 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

- 26) $\vec{\Pi} = p \vec{v}$ est la puissance rayonnée par unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, $\vec{\Pi}$ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

- 27) On a pour l'OPPH acoustique se propageant suivant les z croissants :

$$\vec{\Pi} = p \vec{v} = Z_c v_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

$$\text{donc } I = \langle p \vec{v} \rangle = \frac{p_0^2}{Z_c} \langle \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z \rangle = \frac{1}{2Z_c} p_0^2 = \frac{1}{2\rho_0 c_s} p_0^2$$

28) soit :

- p_0 l'amplitude de surpression de l'onde.
- v_0 l'amplitude de vitesse de l'onde.
- θ_0 l'amplitude de température.

Grâce à 27), on a $p_0 = \sqrt{2\rho_0 c_s I_0} = 3.10^{-3} \text{ Pa}$. On a bien $p_0 \ll P_0$

L'impédance acoustique permet d'obtenir l'amplitude la vitesse : $v_0 = \frac{p_0}{Z_c} = \frac{3.10^{-3}}{410} \approx 7 \mu\text{m.s}^{-1}$. On

a bien $v_0 \ll c_s$

Pour l'onde de température, écrivons l'isentropie de l'évolution du gaz parfait, cad la loi de Laplace

$P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{Cste}$. En différentiant $(1-\gamma) \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0$ soit en ordre de grandeur :

$(1-\gamma) \frac{p_0}{P} + \gamma \frac{\theta_0}{T_0} = 0$ ce qui fournit $\theta_0 = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{p_0}{P} T_0 = \frac{(1,4-1)}{1,4} \times \frac{3.10^{-3}}{10^5} \times 293 = 3.10^{-6} \text{ K}$, on a

bien $\theta_0 \ll T_0$

L'hypothèse acoustique est vérifiée en tout point !

29) Grandes étapes :

Application du 1^{er} principe de la thermodynamique sur un volume élémentaire, entre t et $t+dt$.

Hypothèses :

- Seuls échanges thermiques envisagés avec l'extérieur = diffusion thermique
- Pas de terme de source
- Incompressibilité

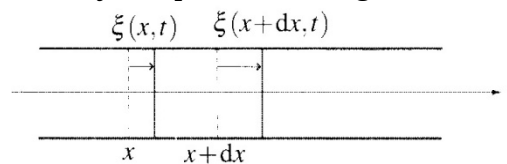
Utilisation de la loi de Fourier

Utilisation de DL à l'ordre 1

30) Hypothèse d'adiabaticité de l'écoulement acoustique : $\chi_s = \frac{1}{\rho_{tot}} \frac{\partial \rho_{tot}}{\partial P_{tot}} = \frac{1}{\rho_{tot}} \frac{\frac{D\rho_{tot}}{Dt}}{\frac{DP_{tot}}{Dt}}$.

Pour valider le caractère adiabatique de l'onde acoustique, il faut comparer la constante de temps de l'onde i.e. sa période T pour une propagation sur l'échelle spatiale typique de l'onde, c.a.d λ , avec une constante de temps de diffusion sur la même échelle $\tau_{diff} = \frac{\lambda^2}{D_{th}}$. La diffusivité dans l'air (de l'ordre de $D_{th} = 2.10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$) permet de conclure, à 200Hz par exemple (se vérifie à toute fréquence) : $\tau_{diff} \gg T = 1\text{ms}$: la propagation du son peut être considérée comme adiabatique (et réversible puisqu'on suppose l'air fluide parfait sans viscosité)

31) Modèle classique : onde acoustique 1D, propagation d'une onde de compression longitudinale selon (Ox), dans un vitrage solide homogène, toutes notations déjà données. On raisonne sur un tronçon entre x et $x + dx$. On note ξ le déplacement longitudinal dû à l'onde à la cote x .



Au passage de l'onde, l'allongement relatif est donc $\frac{\xi(x+dx,t) - \xi(x,t)}{dx} \cong \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)$ au premier ordre en dx .

La dynamique de ce tronçon s'écrit, en projection sur Ox :

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E.S. \frac{\partial \xi}{\partial x}(x+dx,t) - E.S. \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t) = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \text{ avec } dm = \rho_v S. dx$$

Finalement $\rho_v \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ avec la célérité du son dans le verre $c_v = \sqrt{\frac{E}{\rho_v}}$

On obtient alors $E = \rho_v \cdot c_v^2 = 2500 \times 5500^2 = 76 \text{ GPa}$ valeur tout à fait cohérente avec celle tabulée.

32) Les fréquences de l'audible sont dans l'intervalle [20 Hz; 20 kHz], soit avec $\lambda = \frac{c_v}{f}$,

$$\lambda \in [27,5 \text{ cm}; 275 \text{ m}]$$

Pour la vitre simple, $e = 4 \text{ mm}$ par exemple, l'approximation $e \ll \lambda$ est un peu délicate aux hautes fréquences (ie basses longueurs d'onde), facteur 70 pour $\frac{\lambda}{e}$, seulement...

→ On acceptera de négliger le déphasage dû à l'épaisseur du vitrage devant 2π , cad faire l'approximation de vitre « mince » : son épaisseur n'est pas prise en compte autrement que dans sa masse surfacique $\sigma_v = \rho_v \cdot e$.

On peut donc séparer l'effet de la largeur de celui du déplacement induit par les vibrations de la plaque.

Application numérique $\sigma_v = 2,5 \cdot 10^3 \times 4 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$

33) Dans l'approximation acoustique, toute la description est linéaire : l'onde incidente de pulsation ω mettant en mouvement « en bloc » la paroi à la pulsation ω , donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise de même pulsation : $\omega_r = \omega_t = \omega$.

D'après les lois de Descartes pour l'onde acoustique, les ondes réfléchie et transmise se propagent aussi dans la direction (Oz).

En utilisant le résultat de la question 25) pour l'impédance acoustique, on peut donc écrire (directement en complexes):

$$\text{Pour l'onde incidente : } \begin{cases} \underline{p}_i(z, t) = \underline{p}_{i,0} \cdot \exp(j(\omega t - kz)) \\ \underline{\vec{v}}_i(z, t) = Z_c \underline{p}_{i,0} \cdot \exp(j(\omega t - kz)) \underline{\vec{u}}_z \end{cases} \quad \text{pour } z < 0$$

$$\text{Pour l'onde réfléchie : } \begin{cases} \underline{p}_r(z, t) = \underline{p}_{r,0} \cdot \exp(j(\omega t + kz)) \\ \underline{\vec{v}}_r(z, t) = -Z_c \underline{p}_{r,0} \cdot \exp(j(\omega t + kz)) \underline{\vec{u}}_z \end{cases} \quad \text{pour } z < 0$$

$$\text{Pour l'onde transmise : } \begin{cases} \underline{p}_t(z, t) = \underline{p}_{t,0} \cdot \exp(j(\omega t - kz)) \\ \underline{\vec{v}}_t(z, t) = Z_c \underline{p}_{t,0} \cdot \exp(j(\omega t - kz)) \underline{\vec{u}}_z \end{cases} \quad \text{pour } z > 0$$

avec dans le cas des trois ondes la relation de dispersion: $k = \frac{\omega}{c_s}$.

34) Pour $z < 0$, les ondes incidente et réfléchie se superposent.

La continuité de la vitesse en $z = 0^-$ s'écrit donc : $\underline{\vec{v}}_i(0, t) + \underline{\vec{v}}_r(0, t) = \frac{d\underline{w}(t)}{dt} \underline{\vec{u}}_z$

d'où $\underline{v}_i(0, t) + \underline{v}_r(0, t) = \frac{d\underline{w}(t)}{dt}$

donc enfin, en utilisant l'impédance acoustique, en simplifiant les $e^{j\omega t}$:

$$\frac{1}{Z_c} (\underline{p}_{i,0} - \underline{p}_{r,0}) = j\omega \underline{w}_0 \quad (i)$$

De la même façon en $z = 0^+$, puisque la vitre est prise sans épaisseur, $\underline{v}_t(0, t) = \frac{d\underline{w}(t)}{dt}$, donc

$$\frac{1}{Z_c} \underline{p}_{t,0} = j\omega \underline{w}_0 \quad (ii)$$

L'équation du mouvement d'une surface S de vitrage s'écrit donc (directement projetée sur l'axe Oz) :

$$(\sigma_v S) \frac{d^2 \underline{w}}{dt^2} = S \left(\underline{p}_i(0, t) + \underline{p}_r(0, t) - \underline{p}_t(0, t) \right)$$

En simplifiant par S, par $e^{j\omega t}$, en utilisant $\frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega$:

$$\sigma_v (j\omega)^2 \underline{w} = (\underline{p}_{i,0} + \underline{p}_{r,0} - \underline{p}_{t,0})$$

Puis en remplaçant grâce à (i) et (ii), la relation attendue:

$$\boxed{-\sigma_v \omega^2 \cdot \underline{w}_0 = 2\underline{p}_{i,0} - 2j\omega Z_c \cdot \underline{w}_0} \quad (A)$$

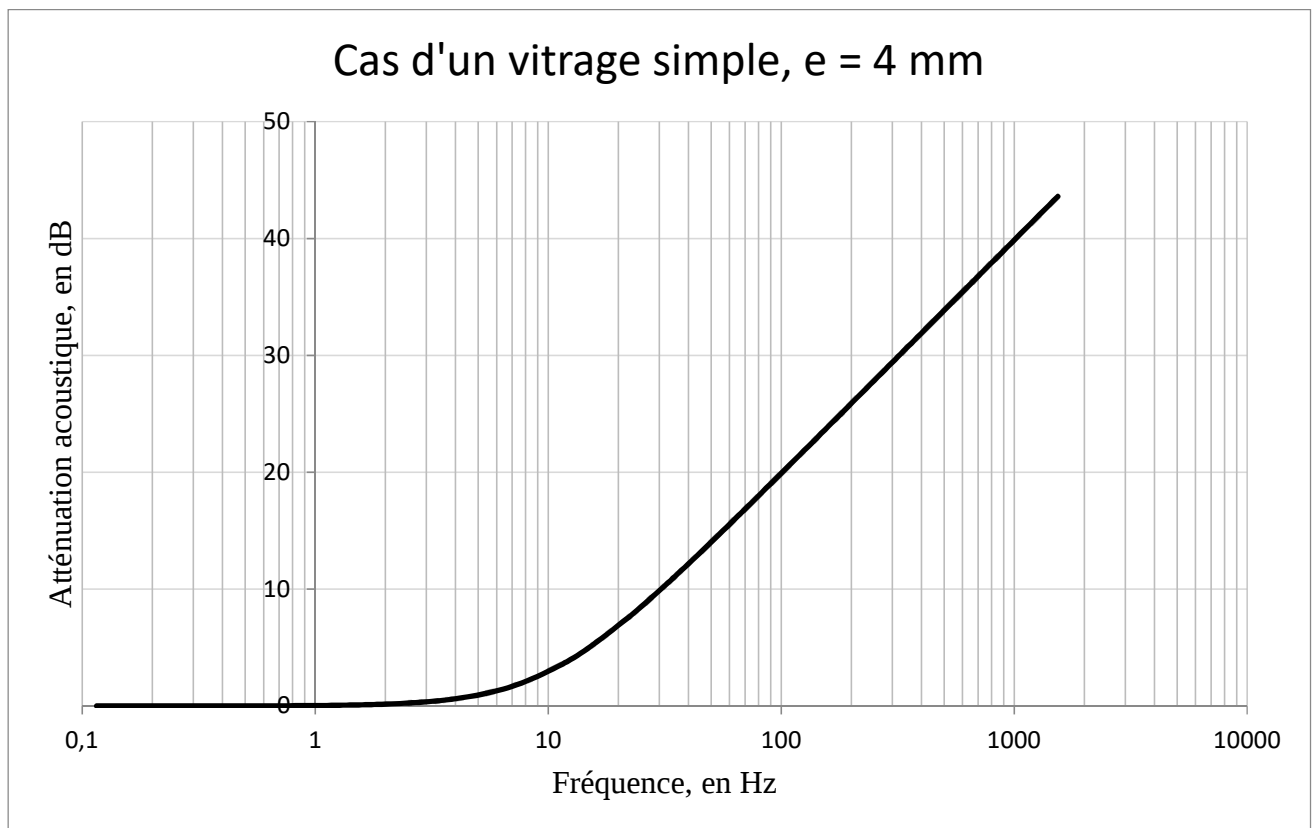
Rq : On obtient bien un terme « radiatif » $2j\omega Z_c \cdot \underline{w}_0$, dû à l'émission de deux ondes acoustiques par la vibration de la plaque mince, l'onde réfléchie) selon $-\underline{\vec{u}}_z$, et l'onde transmise selon $\underline{\vec{u}}_z$.

35) On a alors $(2j\omega Z_c - \sigma_v \omega^2) \cdot \underline{w}_0 = 2\underline{p}_{i,0}$ puis $\underline{w}_0 = \frac{2\underline{p}_{i,0}}{(2j\omega Z_c - \sigma_v \omega^2)}$

En remplaçant grâce à (ii), $\underline{p}_{t,0} = j\omega Z_c \frac{2\underline{p}_{i,0}}{(2j\omega Z_c - \sigma_v \omega^2)}$.

On a donc la transmittance acoustique $\underline{t} = \frac{\underline{p}_{t,0}}{\underline{p}_{i,0}} = \frac{2j\omega Z_c}{(2j\omega Z_c - \sigma_v \omega^2)}$ que l'on peut mettre sous forme canonique : $\underline{t} = \frac{1}{1 + j \frac{\sigma_v \omega}{2Z_c}}$. C'est bien là l'expression d'une fonction de transfert de type passe-bas du premier ordre, avec une fréquence de coupure $f_c = \frac{2Z_c}{2\pi\sigma_v}$, de valeur numérique $f_c = \frac{410}{10 \times \pi} = 6.5 \text{ Hz}$.

36) Avec la définition de R, on aboutit alors à : $R = 10 \log \left(1 + \left(\frac{\sigma_v \omega}{2Z_c} \right)^2 \right)$, dont le tracé est ci-dessous.



Le simple vitrage se comporte comme un passe-bas (il laisse passer les graves, étant donné la valeur de f_c).

Au-delà de 200 Hz, on peut approximer $R \cong 10 \log \left(\left(\frac{\sigma_v \omega}{2Z_c} \right)^2 \right) = 20 \cdot \log \left(\frac{\sigma_v \omega}{2Z_c} \right)$. Quand ω double, R augmente de $20 \cdot \log(2) \approx 6 \text{ dB}$

On peut pour ces fréquences $f > 200 \text{ Hz}$, constater que R augmente avec σ_v : plus le vitrage est épais, plus forte est l'atténuation acoustique à fréquence donnée. (autre point de vue de même conclusion : la fréquence de coupure baisse avec σ_v) : on aura donc intérêt à choisir un simple vitrage épais du point de vue phonique.

On peut déterminer sur la courbe l'augmentation de R par octave (rappelons qu'une octave correspond au doublement de fréquence), par exemple par lecture de R à 2 kHz et de R à 1 kHz : on a bien une atténuation acoustique qui augmente de 6 dB par octave.

37) C'est ici identique à la question 32), mais l'intercalaire est d'épaisseur d. Les fréquences de l'audible sont dans l'intervalle [20 Hz; 20 kHz], soit avec $\lambda = \frac{c_s}{f}$, $\lambda \in [17 \text{ cm}; 170 \text{ m}]$

Pour $d = 12 \text{ mm}$ par exemple, l'approximation $d \ll \lambda$ est un délicate aux hautes fréquences (ie basses longueurs d'onde), facteur 15 au pire pour $\frac{\lambda}{d}$, cette hypothèse-là n'est pas très robuste en deça de 100 Hz...

La pression est donc uniforme dans la cavité puisque superposition d'une onde progressive selon $\vec{u}_z$ et d'une onde selon $-\vec{u}_z$, toute deux de dépendance spatiale en $\exp(\pm jkz)$, et ce déphasage est négligeable devant 2π .

38) La conservation de la masse d'air dans la lame mène à la relation demandée :

$$M = \rho_0 S d = \rho_{tot} S (d + w_d - w_g)$$

$$\text{Soit à l'ordre 1 : } \rho_0 S d = \rho_0 S (d + w_d - w_g) + \rho S d$$

$$\text{En simplifiant : } \rho_0 S (w_d - w_g) + \rho S d = 0 \text{ avec } \rho = \rho_0 \chi_s p_c$$

$$\text{Ce qui mène à } p_c = \frac{w_g - w_d}{d \chi_s} \text{ puis au résultat demandé : } p_c = \rho_0 c^2 \frac{w_g - w_d}{d}$$

L'action du gaz intercalaire de la cavité sur une section S de vitrage est la force pressante : $S \cdot p_c = \frac{\rho_0 c_s^2}{d} S (w_{g,0} - w_{d,0})$, soit par unité de surface $\frac{\rho_0 c_s^2}{d} (w_{g,0} - w_{d,0})$, et l'opposé pour l'action de la cavité sur la paroi à droite. La dynamique d'une surface unité de paroi s'écrit alors :

$$\text{A gauche : } \sigma_v \frac{d^2 w_g}{dt^2} = \frac{\rho_0 c_s^2}{d} (w_{g,0} - w_{d,0}) \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 w_g}{dt^2} = \frac{\rho_0 c_s^2}{\sigma_v d} (w_{g,0} - w_{d,0})$$

$$\text{A droite on aura donc immédiatement } \frac{d^2 w_d}{dt^2} = - \frac{\rho_0 c_s^2}{\sigma_v d} (w_{g,0} - w_{d,0})$$

39) Système masse-ressort-masse :

$$\text{Pour la masse « à gauche » : } m \frac{d^2 u_g}{dt^2} = -K(u_g - u_d) \text{ soit } \frac{d^2 u_g}{dt^2} = -\frac{K}{m}(u_g - u_d)$$

$$\text{Pour la masse « à droite » : } m \frac{d^2 u_d}{dt^2} = +K(u_g - u_d) \text{ soit } \frac{d^2 u_d}{dt^2} = +\frac{K}{m}(u_g - u_d)$$

Il y a identité des formulations, la cavité joue donc le rôle d'un ressort de raideur équivalente, par unité de surface de vitrage : $\frac{\rho_0 c_s^2}{d}$ donc $K_{eq} = \frac{\rho_0 c_s^2}{d} S$

40) On peut envisager un découplage : somme $S(t) = u_g + u_d$, et différence $D(t) = u_g - u_d$

$$\text{On a alors le système } \begin{cases} m \frac{d^2 S}{dt^2} = 0 \\ m \frac{d^2 D}{dt^2} = -2K \cdot D \end{cases}$$

S est le mode « mou », translation en bloc du système; l'équation différentielle en D fait apparaître une pulsation propre $\omega_p = \sqrt{\frac{2K}{m}}$, pulsation de régime libre du système couplé masse-ressort-masse.

41) Poursuivons l'analogie : puisque la cavité est équivalente à un ressort de raideur $K_{eq} = \frac{\rho_0 c_s^2}{d} S$, on a bien de part et d'autre deux masses (surfiques) identiques et une pulsation propre $\sqrt{\frac{2K_{eq}}{\sigma_v S}}$.

$$\sqrt{\frac{2K_{eq}}{\sigma_v S}} = \sqrt{\frac{2\rho_0 c_s^2}{\sigma_v d}}. \text{ C'est bien } \omega'_c !$$

42) Si $\omega \ll \omega'_c$, alors $t_p \cong j \frac{\rho_0 c_s}{\omega \sigma_v}$, la transparence acoustique s'écrit $\tau = \frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{\rho_0 c_s}{\omega \sigma_v} \right)^2$ et l'atténuation acoustique $R = 10 \log \left(\frac{\sigma_v \omega}{Z_c} \right)^2 = 20 \log \left(\frac{\sigma_v \omega}{Z_c} \right)$. L'atténuation augmente dans cette gamme de 6 dB par octave. C'est donc un gain par rapport au simple vitrage dans cette gamme de fréquence, où l'atténuation était nulle

Au voisinage de ω'_c , c'est-à-dire à la résonance du système vitre – cavité - vitre, $\underline{t}_p \rightarrow \infty$ soit $\tau \rightarrow \infty$ et donc $R \rightarrow -\infty$ ce qui est tout à fait impossible (R est minoré par 0). Le modèle ne prend pas en compte des effets de modes dans la cavité, et surtout la dissipation visqueuse dans l'air de la cavité, qui implique $R > 0$.

Pour $\omega \gg \omega'_c$, on obtient $\underline{t}_p \approx \frac{j \frac{\rho_0 c_s}{\omega \sigma_v}}{\left(\frac{\omega}{\omega'_c}\right)^2}$ que l'on peut réécrire $\underline{t}_p \approx j \frac{\rho_0 c_s \omega'^2_c}{\omega^3 \sigma_v}$

On obtient $R = -10 \log \left(\frac{\rho_0 c_s \omega'^2_c}{\omega^3 \sigma_v} \right) = 10 \log \left(\frac{\sigma_v^2 \cdot d \cdot \omega^3}{2 \rho_0^2 c_s^3} \right)$ soit une dépendance de R en $30 \cdot \log \omega$: l'atténuation acoustique dans cette gamme de fréquence augmente de 18 dB par décade. C'est un gain majeur par rapport au simple vitrage, dans cette gamme de 300 Hz à 20 kHz, l'atténuation était de 6dB / octave.

La cavité a donc là un fort rôle atténuateur, puisque triplant toutes choses égales par ailleurs l'atténuation par octave. En outre on a toujours une dépendance en masse surfacique, mais en $\log(\sigma_v^2)$: l'atténuation sera fortement favorisée par des vitres épaisses donc massives.

Le graphe correspond en tout point aux attentes :

- Augmentation de l'atténuation R de 6 dB par octave avant la résonance
- Augmentation de l'atténuation R de 18 dB par octave avant la résonance
- résonance en $f'_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\rho_0 c_s^2}{\sigma_v d}} = 244$ Hz, validé autant que possible par le tracé.

Cette résonance est du point de vue pratique embarrassante : elle correspond par exemple aux fréquences de la voix, qui sera peu atténuée....

L'ensemble, hors considération de coût (et de poids ! le bâti doit être dimensionné en fonction !), permet de conclure en l'état à une bonne isolation phonique :

- Avec un double vitrage de grande épaisseur par vitre : cela abaisse la fréquence de coupure au-delà de laquelle l'atténuation est forte (18 dB par octave).
- D'épaisseur d'intercalaire la plus grande possible pour abaisser f'_c . Mais ce critère est contrecarré par celui d'isolation thermique : d ne peut augmenter au-delà de 16 mm sous peine d'apparition de convection dans cette lame de gaz.

Rq : Pour aller plus loin, on peut jouer sur la nature de l'intercalaire (un gaz rare, d'impédance acoustique moindre que celle l'air), des vitrages d'épaisseurs différentes, puis utiliser des verres feuilletés.

III. Le verre, un matériau fragile

- 43) Ici $\sigma = \frac{F}{a^2}$ car la force F est répartie uniformément sur la section de l'éprouvette d'une part, et car on néglige la variation de la section compte-tenu de la valeur du module de Poisson d'autre part.

$$\text{Ainsi } \frac{\delta l}{l} = \frac{F}{Ea^2} = \frac{700}{7.10^{10} \cdot 10^{-4}} = 10^{-4} = 0,01\%.$$

- 44) Par définition $\alpha = \frac{1}{l} \frac{dl}{dT}$. Ainsi, pour des petites elongations, $\frac{\delta l}{l} = \alpha \Delta T$

En utilisant la loi de Hooke, on obtient alors $\sigma = E\alpha\Delta T$

$$\text{On calcule } \Delta T = \frac{4 \cdot 10^7}{7.10^{10} \times 8.9.10^{-6}} = 64^\circ\text{C}.$$

- 45) L'application du 1^{er} et du 2nd principe de la thermodynamique pour une évolution élémentaire mène au résultat :

$dU + dE_C + dE_{pot} = -P_0 dV + \delta W_{ext} + \delta Q$ (1^{er} principe), avec δW_{ext} le travail des forces autres que les forces de pression

$$dS = \frac{\delta Q}{T_0} + \delta S^C \text{ (2nd principe)}$$

Soit $G^* = U + P_0 V - T_0 S$.

Alors $dG^* = [-P_0 dV + \delta W_{ext} + \delta Q] + [P_0 dV + 0] - [T_0 dS + 0] = \delta W_{ext} - T_0 \delta S^C$ avec $-T_0 \delta S^C \leq 0$ d'après le second principe.

Lors d'une évolution libre, $\delta W_{ext} = 0$.

Et comme on suppose ici qu'en début et en fin d'évolution la plaque est en équilibre thermique et mécanique avec l'environnement, si on indice par I l'état final et par F l'état final, on peut écrire $P_I = P_F$ et $T_I = T_F$. Ainsi $G_F - G_I = G_F^* - G_I^* \leq 0$.

- 46) Le terme $\frac{\pi e b^2 \sigma^2}{2E}$ est un terme d'énergie élastique. En effet, pour un matériau élastique de section

S , de module d'Young E , l'énergie potentielle élastique s'écrit $E_{el} = \frac{1}{2} k (\delta l)^2$, avec $\delta l = \frac{l\sigma}{E}$ et

$$k = \frac{ES}{l} \text{ d'où } E_{el} = \frac{lS\sigma^2}{2E}.$$

Le terme $2\gamma_{ts}eb$ est un terme d'interface air/verre (énergie qu'il faut apporter pour créer une interface), où γ_{ts} est traditionnellement appelé tension superficielle de l'interface.

- 47) Pour trouver la dimension à l'équilibre, on annule la dérivée de l'enthalpie libre. Ainsi :

$$\frac{dG}{db}(b_{eq}) = 0 \Leftrightarrow b_{eq} = \frac{2E\gamma_{ts}}{\pi\sigma^2}$$

La dérivée seconde étant négative, il s'agit d'un équilibre instable.

Si on applique une contrainte inférieure, la fissure va ainsi se propager.

Rq : Pour rendre le verre plus résistant, il faut atténuer le nombre de microfissures sur sa surface en le polissant par exemple. On peut aussi pré-contraindre le verre : verre trempé.